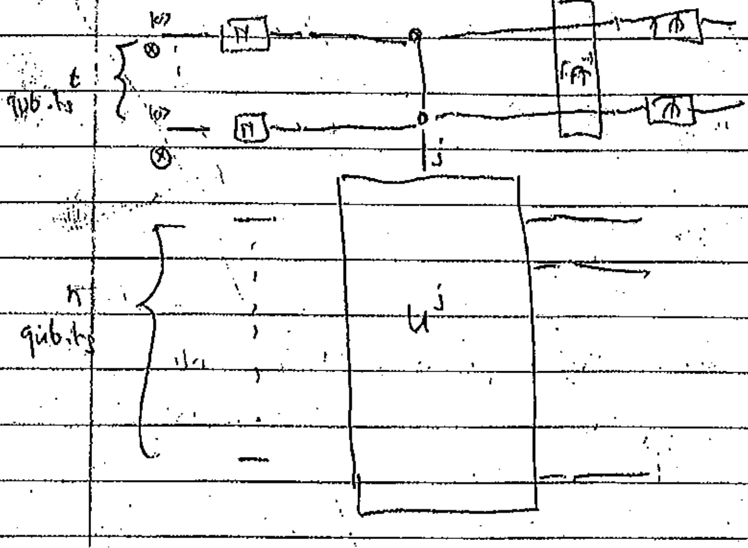
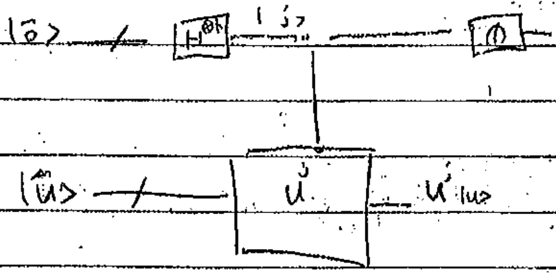
Phase estimation





לא בדיוק

$\lambda \approx e^{2\pi i\alpha} = \omega^{\alpha\cdot T}$ [illegible] U [illegible]

$$|\bar 0\rangle \otimes |u\rangle \to \frac{1}{\sqrt T}\sum_{j=0}^{T-1}|j\rangle\otimes|u\rangle \to \frac{1}{\sqrt T}\sum_{j=0}^{T-1}|j\rangle\otimes\lambda^j|u\rangle$$

$T = 2^t$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt T}\sum_{j=0}^{T-1}\lambda^j|j\rangle\right)\otimes|u\rangle$$

$$\approx \underbrace{\frac{1}{\sqrt T}\sum_j \omega^{kj}|j\rangle}_{FFT^{-1}}$$ $\alpha \approx \frac{k}{T}$ [illegible]

$$\approx |k\rangle \otimes |u\rangle$$

שאלה 2: α כלשהו $\alpha\in[0,1]$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{j=0}^{T-1} w^{\alpha T j}|j\rangle \xrightarrow[FFT^{-1}]{} \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{k=0}^{T-1} w^{\alpha T j}\, w^{-kj}\,|k\rangle$$

[illegible]

$$=\sum_{k=0}^{T-1}\left(\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{T-1} w^{(\alpha T-k)j}\right)|k\rangle$$

אם $\alpha T=j_0$ שלם אז $k=j_0$ בוודאות

המקרה הכללי:

$$prob(k) \underset{[illegible]}{=} P_k = \frac{1}{T^2}\left|\sum_{j=0}^{T-1} w^{(\alpha T-k)j}\right|^2$$

אבל:

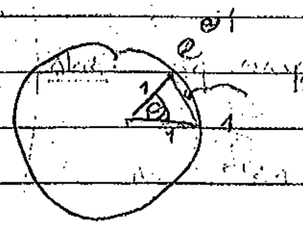
$$\sum_{j=0}^{T-1} w^{(\alpha T-k)j} = \frac{w^{(\alpha T-k)T}-1}{w^{(\alpha T-k)}-1}$$

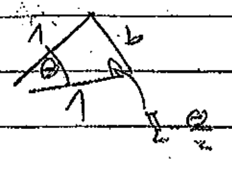
[illegible]

$$P_k = \frac{1}{T^2}\frac{\left|1-w^{(\alpha T-k)T}\right|^2}{\left|1-w^{\alpha T-k}\right|^2} \le \frac{2^2}{\left|1-w^{\alpha T-k}\right|^2}$$

[illegible]

$$|1-e^{\theta i}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$





$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$b = \frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \boxed{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

④

$$|\ldots| = \left|\frac{\alpha T-k}{T}\right| \pmod 1$$

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

$\sin(x)\ge\frac{2x}{\pi}$

$$\ge 2\sin\left(\frac{2\pi\Delta}{2}\right) = 2\sin(\pi\Delta)$$

$$\ge 2\cdot\frac{2\pi\Delta}{\pi} = 4\Delta$$

$$P_k \le \frac{2^2}{(4\Delta)^2} \le \frac{1}{4\Delta^2} \le \frac{1}{4d^2}$$

$$\Delta = \left|\frac{\alpha T-k}{T}\right| = \frac{k}{T}-\alpha \ge d$$

$k=j_0+d$

⑤

$$\omega^{\alpha T-k} = e^{\frac{2\pi i}{T}(\alpha T-k)} = e^{2\pi \cdot \frac{\alpha T-k}{T} i}$$ לכן

$$= e^{2\pi \Delta i}$$

$\Delta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$ מייצג [illegible] mod 1, $\Delta = \frac{\alpha T-k}{T} \pmod 1$ עבור

$$\left|1-\omega^{\alpha T-k}\right| = 2\sin\left(\frac{2\pi\Delta}{2}\right) = 2\sin(\pi\Delta)$$ לכן

$$\underset{\downarrow}{\geq} 2 \cdot \frac{2\pi\Delta}{\pi} = 4\Delta$$

$$\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ עבור

לכן, עבור $k = j_0 + d$ (כש $\frac{j_0}{T}$ הכי קרוב [illegible] α)

$$P_k \leq \frac{2^2}{(4\Delta)^2} \leq \frac{1}{4\Delta^2} \leq \frac{1}{4d^2}$$

$$\Delta = \left|\frac{\alpha T-k}{T}\right| = \frac{k}{T} - \alpha \geq d$$

נסמן עבור $\frac{j_0}{T}$ הכי קרוב ל α , $\varepsilon = \alpha - \frac{j_0}{T}$

מתקיים $|\varepsilon T| = \left|\frac{j_0}{T} - \alpha\right| \le \frac{1}{2}$

$$\omega^{(\alpha T - j_0)T} = e^{2\pi i(\alpha T - j_0)} = e^{\varepsilon T \cdot 2\pi \cdot i}$$

ולכן $\left|1 - \omega^{(\alpha T - j_0)T}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{2\pi}{2} \cdot \varepsilon T\right)\right| = 2\left|\sin(\pi \varepsilon \cdot T)\right|$

$$\ge 2 \cdot \frac{2\pi \varepsilon T}{\pi} = 4\varepsilon T$$

$|\varepsilon T| \le \frac{1}{2}$

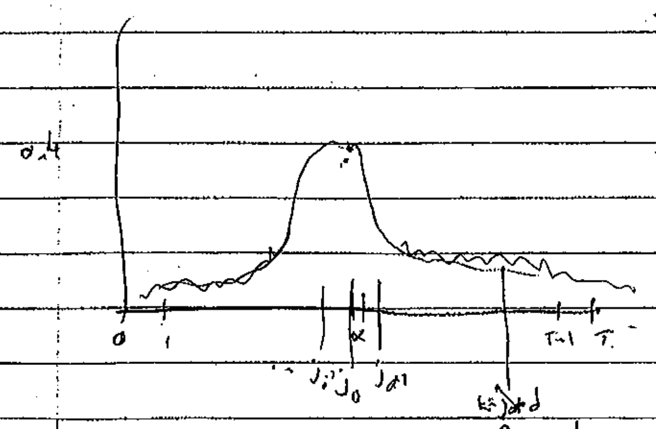
$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\sin(x) \ge \frac{2x}{\pi}$

$$\left|1 - \omega^{\alpha T - j_0}\right| = 2\sin(\pi\Delta) \underset{\forall x\, \sin(x) \le x}{\le} 2\pi\Delta = 2\pi\varepsilon$$

ונזכיר

כאשר $\Delta = \frac{\alpha T - j_0}{T} = \alpha - \frac{j_0}{T} = \varepsilon$

ולכן $P_{j_0} \ge \frac{1}{T^2} \cdot \frac{(4\varepsilon T)^2}{(2\pi\varepsilon)^2} = \frac{16\varepsilon^2 T^2}{4\pi^2 \varepsilon^2 T^2} = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.4$



$\frac{1}{T}$ קרוב ל α

משפט: אם $t = \lceil \lg \frac{1}{\varepsilon} \rceil + \lceil \lg \frac{1}{\delta} \rceil$

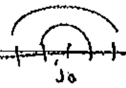
אז $\Pr\left[\begin{array}{c}\text{נקודת הערכה}\\ \text{שגויה ב-}\varepsilon\end{array}\right] \le \delta$

הוכחה: נשגה, אם נקח $k = j_0 \pm \varepsilon \cdot T$

ב-ε מ-j_0 הולך, [illegible] קטעים, δ כך ש $\frac{j_0}{T}$ הוא קרוב ל α.

$$\Pr(\text{נשגה}) = 2 \cdot \sum_{\underset{\text{מרחק}}{d} = \varepsilon T}^{\infty} \overset{k=j_0 \pm d}{\Pr(\text{משקל})} \le \frac{2}{4} \sum_{d=\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{1}{d^2} \le \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\delta}} = \boxed{\frac{\delta}{2}}$$



□

$\varepsilon T = \frac{1}{\delta}$

$T = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\delta}$

הערה: רק הגענו שיפרנו לאט כדי U^T !!!

אבל רוצים בדוק ל n ½ ביט, צריך לצעד למשל $U^{(2^n)}$ צעדים!!!

(7)

[illegible] FFT [illegible]

① [illegible]

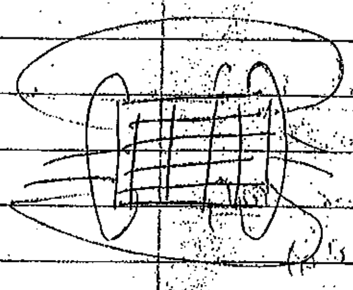
$G=(V,E)$ אם $A_{n\times n}$ [illegible] $A_{ij} = f(i,j^{-1})$

1. V [illegible]

$f: G \to \mathbb{C}$ 2. $A_{ij} = f(ij^{-1})$ [illegible]

[illegible] 1. $G = C_q$ $C_n = (\mathbb{Z}_q, + \bmod q)$

$A_{ij} = \begin{cases} 1 & |j-i| = 1 \\ 0 & \text{[illegible]} \end{cases}$



2. $G = C_q \times C_q$ $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{[illegible]} \end{cases}$

3. [illegible] $G = \mathbb{Z}_2^n$

$f_{ij} = \{ 1 \iff ji^{-1} \in \{e_1, \dots, e_n\}$

[illegible] $Cay(G,S)$

$A_{ij} = \{1 \iff ji^{-1} \in S\}$ [illegible] ⑧

[illegible] S [illegible] G [illegible]

טענה: יהי G אבלית, Γ גרף קיילי של G עם יוצרים S

אז הו"ע של A הם הקרקטרים של G

והע"ע של A עבור ו"ע χ, הוא $\sum_{s\in S}\overline{\chi(s)}$

הוכחה:

$$(A\chi)_w = \sum_{v\in G} A_{wv}\,\chi(v) = \sum_{v\in G} f(wv^{-1})\,\chi(v)$$

$$= \sum_{\substack{v'\in G\\ v'=wv^{-1}}} f(v')\,\chi(w(v')^{-1}) = \underbrace{\left(\sum_{v'} f(v')\,\chi((v')^{-1})\right)}_{\text{זה ע"ע}}\chi(w)$$

$\chi(z^{-1}) = (\chi(z))^{-1} = \overline{\chi(z)}$

$$\sum_{v'} f(v')\,\overline{\chi(v')}$$

$$\langle \chi, f\rangle$$

דוגמא: עבור q טבעי

$G = (\mathbb{Z}_q, +\bmod q)$

$S = \{1\}$

ו"ע הם $\chi_t = \sum_{k=0}^{q-1}\chi_t(k)\,|k\rangle$

עם ע"ע $\lambda_t = \overline{\chi_t(1)} = w^{-t} = e^{-\frac{2\pi i t}{q}}$

קירוב FT_q עבור q כללי

יהי n הטבעי הראשון כך ש- $q \le 2^n$

נגדיר

$$U: x \to (x+1) \pmod q$$

המטריצה U אוניטרית על $B = \mathrm{span}\{|0\rangle, \dots, |q-1\rangle\}$

ו"ע

$$\chi_t = \frac{1}{\sqrt q}\sum_k \chi_t(k)\,|k\rangle$$

וע"ע

$$\lambda_t = \omega^{-t} = e^{-\frac{2\pi i t}{q}}$$

אנחנו רוצים למצוא FT_q^{-1} שמעבירה $|\chi_t\rangle$ ל $|t\rangle$

תיאור הפעולה:

$$|\chi_t\rangle \otimes \underset{\text{Ancilla}}{|0\rangle} \xrightarrow[\text{phase estimation}]{\text{קירוב}} |\chi_t\rangle \otimes |t\rangle$$

[illegible]

צריך את זה בשביל לחשב נכון U^m ישירות לכל m

$$\xrightarrow{\text{swap}} |t\rangle \otimes |\chi_t\rangle$$

$$\to |t\rangle \otimes |\chi_0\rangle$$

$$|t\rangle \otimes |\chi_t\rangle = \sum_k \frac{1}{\sqrt q}\chi_t(k)\,|t,k\rangle$$

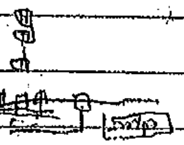
זה ידוע שקל

$$|t,k\rangle \to \overline{\chi_t(k)}\,|t,k\rangle$$ פעולה ע"י שערים

10

לסיכום: בהסתברות $1-\epsilon$ קירוב ϵ לכל התהליך $O(\lg\lg\frac{1}{\epsilon} + \lg\frac{1}{\epsilon})$ qubits נוספים

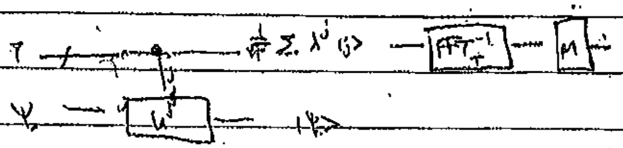
[illegible]



[illegible] $\mathbb{Z}_p^n$

[illegible] $\mathbb{Z}_{pq}^n$

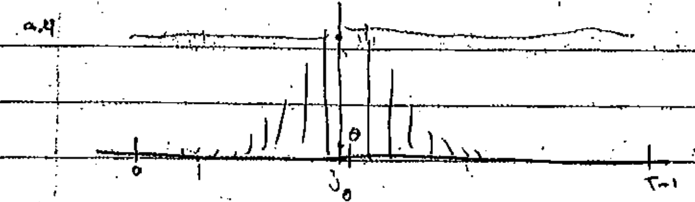
phase estimation



[illegible] $\lambda = w^t$ [illegible] $0 \le k \le$ [illegible]

[illegible] $w = e^{\theta i}$, $T = O(\log\frac{1}{\varepsilon} + \log\frac{1}{\delta})$

[illegible] k



θ [illegible] $\frac{j_0}{T}$

[illegible] $\Pr(j_0) \ge 0.4$

$\Pr(j \mid |\frac{j}{T} - \theta| \ge \varepsilon) \le \delta$

[illegible] $\mathbb{Z}_p$ FFT_p^{-1} [illegible]

① 8 [illegible]

– נקח n מספיק ב 2 הספרות שגדול מ p

$$2^{n-1} \leq p \leq 2^n$$

– נגדיר $U: [0..p-1] \to [0..p-1]$

ע״י $U(x) = (x+1) \pmod p$

ונשלים אותה שתהיה הפיכה,

$$U(x) = \begin{cases} (x+1) \bmod p & x \in \{0, \dots, p-1\} \\ x & x \in \{p, \dots, 2^n-1\} \end{cases}$$

וערכים עצמיים

U פעולה על הבסיס ולכן אוניטרית

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

על $\mathbb{Z}_p$ U היא P_p

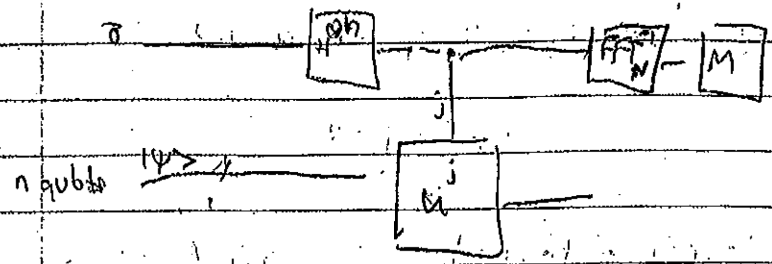
$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & j-i = 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן הו״ע הם הקרקטרים של $\mathbb{Z}_p$ $v_t = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_k \chi_t(k)|k\rangle$

כאשר, $\chi_t(k) = \omega_p^{tk} = e^{-2\pi i \frac{tk}{p}}$

והע״ע של v_t הוא $\lambda_t = \omega^{-t} = e^{-\frac{2\pi i t}{p}}$

שאלה 1:
את המוכנים!



אם $|V_t\rangle = \Psi$ הרי, לפי מקבלים את קירוב (…)
ל $\frac{t}{p}$ $|\theta - \frac{t}{p}| \le \varepsilon$ כאשר $\varepsilon = \frac{1}{2p}$.

שלב 2 המספר j,
נבחר t_0 השלם הכי קרוב ל θp.

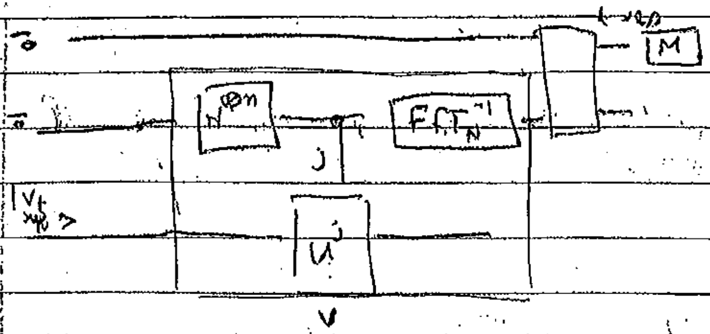
לכן כיוון שהתנאי הזה לפי, נקבל $t_0 = t$
$\Pr[t_0 = t] \ge \Pr[|\theta - \frac{t}{p}| \le \varepsilon] \ge \delta$

הוכחה: נניח $|\theta - \frac{t}{p}| \le \varepsilon$ ולכן $|\theta p - t| \le \varepsilon p \le \frac{1}{2}$. לכן נקבל את t. □

תקין כמו בשאלה 1 אנו נקבל את t

מה שעשה בעצם,

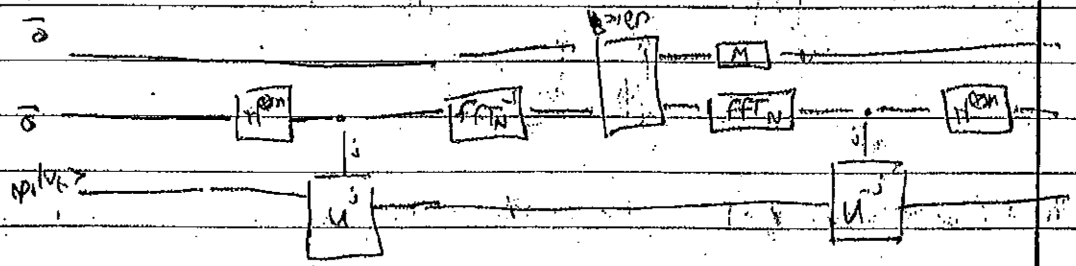
זה:



ונקבל שאנו "ל קרובים" למצב

$$V\left(|0\rangle\otimes|\psi\rangle\right)\otimes|t\rangle$$

סבבו פעם V^{-1}, כלומר, הפעם הפוך:



ונקבל שאנו "לב (!) קרובים" למצב

$$V^{\dagger}V\left(|0\rangle\otimes|\psi_t\rangle\right)\otimes|t\rangle = |0\rangle\otimes|v_t\rangle\otimes|t\rangle$$

איך מבדילים שמצב מספיק קרוב למצב אחר?

יש כמה אפשרויות:

1. בין pure states ψ_1, ψ_2

ה fidelity הוא $|\langle\psi_1,\psi_2\rangle|$

יש לזה הרחבה ל mixed states

2. בין mixed states $\| |\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \|_{tr}$.

נבחר רק את השמאלי.