שיעור 4

מטריצת הצפיפות

[illegible] הכללי של מערכת שהמצבים ψ_i [illegible]
אותה .. $\psi_i \otimes \psi_j$

נגדיר מטריצה $\{p_i, \psi_i\}$ [illegible] $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

נשים לב ש: ρ:

1. הרמיטית $\rho^\dagger = \rho$
2. [illegible] קמור של חיוביות [illegible] חיובית

(לכל v, $v^\dagger \rho v = \sum p_i \underbrace{v^\dagger |\psi_i\rangle\langle\psi_i| v}_{\geq 0}$)

3. עקבה $Tr(\rho) = \sum p_i \underbrace{Tr(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)}_{\text{מנורמלים}} = \sum p_i = 1$

← [illegible] many $\Rightarrow$ one

לדוג' I הוא עבור $\{(\tfrac{1}{2}, |0\rangle), (\tfrac{1}{2}, |1\rangle)\}$

וגם $\{(\tfrac{1}{2}, |+\rangle), (\tfrac{1}{2}, |-\rangle)\}$

— משפט: [illegible]

אם ρ [illegible] Tr 1,

אז [illegible]

$\rho = \sum p_i |v_i\rangle\langle v_i|$ עם $0 \leq p_i$, $\sum p_i = 1$

כי $Tr(\rho) = 1$ כי $\rho \geq 0$

הם מצב h . $\{(p_i, |v_i\rangle)\}$

①

הגדרה: מצב, אם כן, הוא אופ' מ $\rho: \underbrace{HOM(H)}_{[illegible]\ H} \to Hom(H)$

כך ש: 1. $\rho \geq 0$, $\rho = \rho^{\dagger}$

2. $Tr(\rho) = 0$

נסמן אותו ב $\underbrace{D(H)}$

מטריצות צפיפות אופ' מ dim של H.

טענה: $D(H)$ קבוצה קמורה.

א. אם ρ_1, ρ_2 הרמיטיות, חיובית

אז גם $\rho_1 + \rho_2$ (חיובי)

- $Tr(\underbrace{\sum \lambda_i \rho_i}_{\text{לינ'}}) = \sum \lambda_i Tr(\rho_i) = \sum \lambda_i = 1$ -

המקרים אלו הם ה pure-states $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

כאשר $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$.

אז באופן שקול, מ $\rho \in D(H)$ כך ש $rank(\rho) = 1$

כללי:

קבוצה כלל: $\{M_k : \mathrm{Hom}(H) \to \mathrm{Hom}(H')\}$

כך ש $\sum_{k=1}^{T} M_k^\dagger M_k = I$

ולכן : אם הגיע המצב ρ

מקבלים תוצאה k בהסתברות $= Tr(M_k^\dagger M_k \rho)$

בהינתן תוצאה k, נקבל מצב $\frac{M_k \rho M_k^\dagger}{P_k}$

$$\sum pr(i|k) \cdot \frac{M_k \varphi_i \varphi_i^\dagger M_k^\dagger}{P_k |M_k \varphi_i|^2} = \frac{M_k}{P_k}\left(\sum_i P_i \frac{pr(\cancel{k|i})}{|\cancel{M_k \varphi_i}|^2} \varphi_i \varphi_i^\dagger\right) M_k^\dagger = \boxed{\frac{M_k \rho M_k^\dagger}{P_k}}$$

$$) = \frac{p(i,k)}{p(k)} = \frac{p(i) \cdot p(k|i)}{p(k)}$$

ה d.m. הממוצע לאחר מדידה כזו

$$\sum_k P_k \cdot \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{P_k} = \boxed{\sum_k M_k \rho M_k^\dagger}$$

אם מתעניינים רק בתוצאת המדידה, ולא במצב הסופי של המערכת משתמשים ב: POVM

$$\{E_k\}_{k=1}^{T} , \quad E_k : \mathrm{Hom}(\mathcal{H}) \Rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{H})$$

$$E_k \geq 0 , \quad \sum_k E_k = I$$

כל PVM (מין מיוחד)

כל מדידה (כולל שום מדידה) מגדירה POVM.

אם נתון משחק:

מצב ρ

מדידה POVM $\{E_k\}_{k=1}^{T}$

תוצאה k ש׳ ערך λ אג׳

ויוני רק מעוניין בתוחלת המשחק

$\sum_k p_k \cdot \lambda_k$ אג׳ — הסת׳ לתוצאה

אין צורך לספר את

נסמן $H=\sum_k \lambda_k E_k$

נשים לב ש H הרמיטי

ועבור מצב ρ

$$Tr(H\rho)=\sum_k \lambda_k Tr(E_k\rho)=\sum_k \lambda_k p_k=$$ תוחלת הניסוי

כאן תאור קומפקטי יותר (מטריצה אחת במקום T)

ולעיתים הוא מאבד אינפורמציה (לגבי תוצאה

אבל הוא שומר את האינפורמציה לגבי תוחלת

H כזה נקרא Observable

אם H הרמיטי [illegible] העצמית נס׳: H הרמיטי, ולכן

[illegible] $E_k=|v_k\rangle\langle v_k|$ [illegible]

Clauser, Horne, Shimony, Holt 69 — CHSH game
inequality

[illegible]

[illegible] A,B
referee

A ← r∈{0,1} [illegible] referee [illegible]
B ← s∈{0,1} [illegible]

A [illegible] $a(r)\in\{0,1\}$
B [illegible] $b(s)\in\{0,1\}$

A,B [illegible] $a\oplus b = r\cdot s$

[illegible] A,B [illegible]
[illegible]

① A,B [illegible]
[illegible]
[illegible]

$a_0 \oplus b_0 = 0$
$a_0 \oplus b_1 = 0$
$a_1 \oplus b_0 = 0$
$a_1 \oplus b_1 = 1$

⇒ $0 \oplus 0 = 0 \oplus 1$

$0 = 1$

[illegible]
[illegible] $) = \frac{3}{4}$

[illegible] $a_y \oplus a_x = b_0 \cdot b_1$

① [illegible]

$b_0 = \begin{cases} 0 & q_0 \\ 1 & 1-q_0 \end{cases}$ $\qquad a_0 = \begin{cases} 0 & p_0 \\ 1 & 1-p_0 \end{cases}$ [illegible]

$b_1 = \begin{cases} 0 & q_1 \\ 1 & 1-q_1 \end{cases}$ $\qquad a_1 = \begin{cases} 0 & p_1 \\ 1 & 1-p_1 \end{cases}$

[illegible]

$\Pr[\text{[illegible]}] \le \frac{3}{4}$ [illegible]

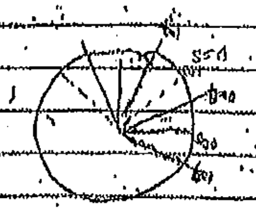
max

[illegible]

② [illegible]

[illegible] EPR [illegible]

$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle + |11\rangle\right]$



[illegible] B [illegible]

$B_0 = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ [illegible]

$\{v_0, v_{\frac{\pi}{2}}\}$

[illegible]

$B_{\frac{\pi}{4}} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ [illegible]

$\{v_{\frac{\pi}{4}}, v_{\frac{3\pi}{4}}\}$

$\{v_\theta, v_{\theta+\frac{\pi}{2}}\} = B_\theta$ [illegible] B [illegible]

$\{v_{-\theta}, v_{-\theta+\frac{\pi}{2}}\} = B_{-\theta}$ " " " "

ג) אם A,B קוונטים

A,B חולקים EPR

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle + |11\rangle\right]$$

מעבדת A: אם $s=0$ מודד בבסיס

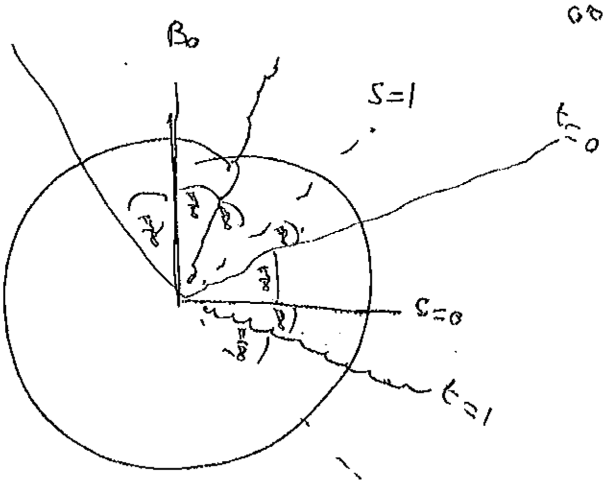
$B_0 = \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{V_0, V_{\frac{\pi}{2}}\}$, $|0\rangle$ תשובה 0

$|1\rangle$ " 1.

ואם $s=1$ מודד בבסיס

$B_{\frac{\pi}{4}} = \{|+\rangle, |-\rangle\} = \{V_{-\frac{\pi}{4}}, V_{\frac{\pi}{4}}\}$

$V_\theta = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$



מעבדת B:

אם $t=0$ מודד בבסיס $\{V_{\frac{\pi}{8}}, V_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

ואם $t=1$ מודד בבסיס $\{V_{-\frac{\pi}{8}}, V_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

איך נראה של החשבה.

נניח ש~~[illegible]~~ s, A' מבצעת POVM $\{A_0^s, A_1^s\}$

$\underset{\text{תשובה 0}}{A_0^s}$, $\underset{\text{תשובה 1}}{A_1^s}$

t, B ״ ״ $\{B_0^t, B_1^t\}$

אז ה POVM המשותף הוא

$$\{\underbrace{A_0^s\otimes B_0^t}_{\substack{\text{תשובה}\\(0,0)}},\ \underset{(0,1)}{A_0^s\otimes B_1^t},\ \underset{(1,0)}{A_1^s\otimes B_0^t},\ \underset{(1,1)}{A_1^s\otimes B_1^t}\}$$

[הערה: $\sum_{a,b} A_a^s\otimes B_b^t = \sum_a A_a^s\otimes\sum_b B_b^t = I\otimes I = I$]

כמו. במקרה הקלאסי, נניח שהמדידה של [illegible] נעשה (שהעזרים [illegible]) הוא נמדד.

נניח שהשחקנים זוכים ערך המשחק 1
״ מפסידים ״ ״ -1.

אז עבור s=t=0 נקבל את ה POVM

$$\{\underset{\text{נצחון}}{A_0^0\times B_0^0 + A_1^0\otimes B_1^0},\ \underset{\text{הפסד}}{A_0^0\otimes B_1^0 + B_1^0\otimes B_0^0}\}\qquad s=0,\ t=0$$

$s=0,\ t=1$

$$\underset{\text{נצחון}}{A_0^0\otimes B_0^1 + A_1^0\otimes B_1^1},\ \underset{\text{הפסד}}{A_0^0\otimes B_1^1 + A_1^0\otimes B_0^1}\}$$

$$\underset{}{A_0^1\otimes B_0^0 + A_1^1\otimes B_1^0},\ A_0^1\otimes B_1^0 + A_1^1\otimes B_0^0\}\qquad s=1,\ t=0$$

~~[illegible]~~
שיוויון מנצחים
כש
$a\oplus b = \underline{1}$ →

$$\underbrace{\underset{\text{נצחון}}{A_0^1\otimes B_1^1} + A_0^1\otimes B_1^1},\ \underset{\text{הפסד}}{A_0^1\otimes B_0^1 + A_1^1\otimes B_0^1}\}\qquad s=1,\ t=1$$

$$pr(\text{ניצחון}) = \frac{1}{4}\Big[\underbrace{Tr\big((A^0_0\otimes B^0_0 + A^0_1\otimes B^0_1)\rho\big)}_{\text{במקרה } s=t=0} + \underbrace{Tr\big((A^0_0\otimes B^1_0 + A^0_1\otimes B^1_1)\rho\big)}_{\text{במקרה } s=0,\ t=1}$$

$$+ \underbrace{Tr\big((A^1_0\otimes B^0_0 + A^1_1\otimes B^0_1)\rho\big)}_{s=1,\ t=0} + \underbrace{Tr\big((A^1_0\otimes B^1_1 + A^1_1\otimes B^1_0)\rho\big)}_{s=t=1}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[Tr\big(A^0_0\otimes B^0_0 + A^0_1\otimes B^0_1 + A^0_0\otimes B^1_0 + A^0_1\otimes B^1_1 + A^1_0\otimes B^0_0 + A^1_1\otimes B^0_1 + A^1_0\otimes B^1_1 + A^1_1\otimes B^1_0)\rho\big)\Big]$$

$$pr(\text{הפסד}) = \frac{1}{4}\Big[Tr\big(A^0_0\otimes B^0_1 + A^0_1\otimes B^0_0 + A^0_0\otimes B^1_1 + A^0_1\otimes B^1_0 + A^1_0\otimes B^0_1 + A^1_1\otimes B^0_0 + A^1_0\otimes B^1_0 + A^1_1\otimes B^1_1)\rho$$

$$pr(\text{ניצחון}) - pr(\text{הפסד}) = \frac{1}{4}\Big[Tr\Big[A^0_0\otimes B^0_0 + A^0_1\otimes B^0_1 - A^0_0\otimes B^0_1 - A^0_1\otimes B^0_0 +$$
$$A^0_0\otimes B^1_0 + A^0_1\otimes B^1_1 - A^0_0\otimes B^1_1 - A^0_1\otimes B^1_0 +$$
$$A^1_0\otimes B^0_0 + A^1_1\otimes B^0_1 - A^1_0\otimes B^0_1 - A^1_1\otimes B^0_0 +$$
$$A^1_0\otimes B^1_1 + A^1_1\otimes B^1_0 - A^1_0\otimes B^1_0 - A^1_1\otimes B^1_1\Big]\rho\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[Tr\big((A^0_0 - A^0_1)\otimes(B^0_0 - B^0_1) + (A^0_0 - A^0_1)\otimes(B^1_0 - B^1_1) + (A^1_0 - A^1_1)\otimes(B^0_0 - B^0_1) - (A^1_0 - A^1_1)\otimes(B^1_0 - B$$

$$= \frac{1}{4}\Big[Tr\big(\underbrace{(A^0\otimes B^0 + A^0\otimes B^1 + A^1\otimes B^0 - A^1\otimes B^1)}_{H}\rho\big)\Big]$$

$A^0 = A^0_0 - A^0_1$

$B^0 = B^0_0 - B^0_1$

$H = \frac{1}{4}\left(A^0\otimes B^0 + A^0\otimes B^1 + A^1\otimes B^0 - A^1\otimes B^1\right)$, $pr(\text{ניצחון}) - pr(\text{הפסד}) = Tr(H\rho)$

$A^0_0 = |V_0\rangle\langle V_0| = |0\rangle\langle 0|$

$A^0_1 = |V_{\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{2}}| = |1\rangle\langle 1|$

$A^1_0 = |V_{\frac{\pi}{4}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{4}}| = |+\rangle\langle +|$

$A^1_1 = |V_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}| = |-\rangle\langle -|$

$B^0_0 = |V_{\frac{\pi}{8}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{8}}|$

$B^0_1 = |V_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}|$

$B^1_0 = |V_{-\frac{\pi}{8}}\rangle\langle V_{-\frac{\pi}{8}}|$

$B^1_1 = |V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}|$

$$|V_\alpha\rangle\langle V_\alpha| = \big(c(\alpha)|0\rangle + s(\alpha)|1\rangle\big)\big(c(\alpha)\langle 0| + s(\alpha)\langle 1|\big)$$

$$= \begin{pmatrix} c^2(\alpha) & c(\alpha)\,s(\alpha) \\ s(\alpha)\,c(\alpha) & s^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$|V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}| = \begin{pmatrix} c^2(\alpha+\frac{\pi}{2}) & c(\alpha+\frac{\pi}{2})\,s(\alpha+\frac{\pi}{2}) \\ s(\alpha+\frac{\pi}{2})\,c(\alpha+\frac{\pi}{2}) & s^2(\alpha+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$c(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -s(\alpha)$

$s(\alpha+\frac{\pi}{2}) = c(\alpha)$

$$= \begin{pmatrix} s^2(\alpha) & -s(\alpha)\,c(\alpha) \\ -s(\alpha)\,c(\alpha) & c^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$H_\alpha = |V_\alpha\rangle\langle V_\alpha| - |V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}|$$

$$= \begin{pmatrix} c^2(\alpha) - s^2(\alpha) & s(2\alpha) \\ s(2\alpha) & s^2(\alpha) - c^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(2\alpha) & s(2\alpha) \\ s(2\alpha) & -c(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Good!

$$A^0 = A^0_0 - A^0_1 = \underset{\alpha=0}{H_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

$$A^1 = A^1_0 - A^1_1 = H_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} c^2(\frac{\pi}{4}) - s^2(\frac{\pi}{4}) & s(\frac{\pi}{2}) \\ s(\frac{\pi}{2}) & s^2(\frac{\pi}{4}) - c^2(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$

$$B^0 = B^0_0 - B^0_1 = H_{\frac{\pi}{8}} = \begin{pmatrix} \cancel{c^2(\frac{\pi}{8}) - s^2(\frac{\pi}{8})} & c(\frac{\pi}{4}) & s(\frac{\pi}{4}) \\ & s(\frac{\pi}{4}) & -c(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^1 = B^1_0 - B^1_1 = H_{-\frac{\pi}{8}} = \begin{pmatrix} c(-\frac{\pi}{4}) & s(-\frac{\pi}{4}) \\ s(-\frac{\pi}{4}) & -c(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$c(\alpha) = c(-\alpha)$

$s(\alpha) = -s(-\alpha)$

חישוב של H

$$H = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} B^0 & 0 \\ 0 & -B^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & -B^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B^0 \\ B^0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B^1 \\ B^1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$A^0 \otimes B^0$ $\quad A^0 \otimes B^1$ $\quad A^1 \otimes B^0$ $\quad A^1 \otimes B^1$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} B^0 + B^1 & B^0 - B^1 \\ B^0 - B^1 & -(B^0 + B^1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Pr(\text{ניצחון}) - \Pr(\text{הפסד}) = \mathrm{Tr}(H\rho)$$

$$\rho = |EPR\rangle\langle EPR| = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)\left(\langle 00| + \langle 11|\right)$$ [illegible]

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חישוב

$$\mathrm{Tr}(H\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[2 + 0 + 0 + 2\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} = \Pr(\text{ניצחון}) - \Pr(\text{הפסד}).$$

$$\Pr(\text{ניצחון}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx \underline{0.86}$$

[illegible]:

15

נשתמש בקודם. דרך יותר פשוטה להגיע לתיאור הנ״ל עם observables

יותר אינטואיטיבי-

נסמן

$$A^0 = A^0_0 - A^0_1$$

באופן כללי, אם יש POVM $\{E_i\}$

ולתוצאה i יש ערך λ_i

נגדיר

$$H = \sum \lambda_i E_i$$

נשים לב, שבכל מצב ρ

$$Tr(H\rho) = \sum \lambda_i \underbrace{Tr(E_i\rho)} = \sum \lambda_i \, pr(\text{תוצאה } i) = \text{תוחלת ערך המשתנה המתאר.}$$

הגדרה אם נסמן ערך המשחק לתוצאה $(-1)^a$.

כלומר - אם נסמן 1 / -1

$$\begin{pmatrix} (-1)^0 = 1 & 0 & \text{תשובה} \\ (-1)^1 = -1 & 1 & '' \end{pmatrix}$$

שלב א'

$$A^0 = A^0_0 - A^0_1$$

תוחלת ערך המשחק בהתאם ש A נשאל 0.

(0 נכחון שערך 2.
1 הסיכוי ערכו-)

כנ״ל

$$A^1 = A^1_0 - A^1_1$$

$$B^0 = B^0_0 - B^0_1$$

$$B^1 = B^1_0 - B^1_1$$

אם עכשיו נסתכל על $A^0\otimes B^0$,

אז הוא מחשב את המכפלה המוצעת ב $s=0$, $t=0,1$

וערך המשחק, כמו כל ו״ע, הוא על ו״ע $v\otimes w$,

עם ע״ע $\lambda_v\cdot\lambda_w$, כי $(A\otimes B)(v\otimes w)=(Av)\otimes(Bw)=\lambda_v\cdot\lambda_w(v\otimes w)$.

כלומר $(-1)^{x_1}\cdot(-1)^{x_2}=(-1)^{x_1\oplus x_2}$

ובהסבר: אנו מנצחים $1=(-1)^0$ אם $x_1\oplus x_2=0$

ומפסידים $-1=(-1)^1$ אם $x_1\oplus x_2=1$

מכאן ש $A^0\otimes B^0$ מייצג את תוחלת הניצחון/הפסד

בניסוי שקורה כש $s=0$, $t=0$. ניצחון נקרא $a\oplus b=0$

כנ״ל $A^0\otimes B^1$ עבור הניסוי $s=0$, $t=1$

$A^1\otimes B^0$ 〃 〃 $s=1$, $t=0$

עבור $A^1\otimes B^1$ – ניצחון – $\oplus = 0$
הפסד – $\oplus = 1$

הפוך מהניצחון המשחק
$a\oplus b=s\cdot t$

ולכן תוחלת הניצחון במשחק $a\oplus b=s\cdot t$

$$H=\frac{1}{4}\Big[\underbrace{A^0\otimes B^0}_{\substack{\text{קורה}\\ s=t=0}}+\underbrace{A^0\otimes B^1}_{\substack{\text{קורה}\\ s=0,\ t=1}}+\underbrace{A^1\otimes B^0}_{\substack{\text{קורה}\\ s=1,\ t=0}}\overset{\text{הכל}}{-}\underbrace{A^1\otimes B^1}_{\substack{\text{קורה}\\ s=1,\ t=1}}\Big]$$

– כי מנצחים כש $a\oplus b=1$
מוחלף בין נצחון והפסד.

[illegible] Tsirelson's bound

[illegible] A_0, A_1, B_0, B_1 [illegible]

[illegible] ψ [illegible]

[illegible] $|\langle\psi|A_0\otimes B_0+A_0\otimes B_1+A_1\otimes B_0-A_1\otimes B_1|\psi\rangle|\le 2\sqrt{2}$

[illegible] A_i, B_i [illegible]

[illegible]

[illegible] A [illegible]

[illegible]

[illegible] $v=(v_1,\dots,v_k)$ [illegible] $\|v\|=\sqrt{\sum|v_i|^2}$

[illegible] A [illegible] $\|A\|=\max_v\frac{\|Av\|}{\|v\|}$

[illegible] $\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}$ [illegible]

[illegible] A [illegible] $\|A\|=\max_i|\lambda_i(A)|=\lambda_1(A)$

[illegible]

$\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

$\|A\otimes B\|=\|A\|\cdot\|B\|$

[illegible]

[illegible] $(\langle A|\otimes\langle B|)$

[illegible]

$|\langle v|w\rangle|\le\|v\|\cdot\|w\|$

$|\sum v_iw_i|\le\sqrt{\sum|v_i|^2}\sqrt{\sum|w_i|^2}$

$\langle\Psi| A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1 |\Psi\rangle$

$\le \|(A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1)|\Psi\rangle\|$

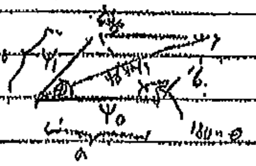
$\le \|(A_0\otimes(B_0+B_1))\Psi\| + \|(A_1\otimes(B_0-B_1))\Psi\|$

$\le \|(I\otimes(B_0+B_1))\Psi\| + \|(I\otimes(B_0-B_1))\Psi\|$

$= \|\Psi_0+\Psi_1\| + \|\Psi_0-\Psi_1\|$

$\Psi_1 = (I\otimes B_1)\Psi, \quad \Psi_0 = (I\otimes B_0)\Psi$

$\|\Psi_1\| \le 1 \qquad \|\Psi_0\| = \|I\otimes B_0\,\Psi\| \le \|I\otimes B_0\|\cdot\|\Psi\| \le \|I\|\cdot\|B_0\| \le 1$



$\underbrace{\|\Psi_0+\Psi_1\|} + \underbrace{\|\Psi_0-\Psi_1\|} =$

$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(180-\theta)} + \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$

$= \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} + \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$

$\sqrt{2+2\cos\theta} + \sqrt{2-2\cos\theta}$ $\qquad \dfrac{\langle\Psi_1|\Psi_0\rangle}{\|\Psi_1\|\,\|\Psi_0\|} = \cos\theta$

$|a|=|b|=1$

$2\sqrt{2}$

max $\theta = 90$ $\qquad \Psi_0 \perp \Psi_1$

17

[illegible]

$$\|A\otimes B\psi\| = \sqrt{\psi^\dagger (A\otimes B)^\dagger A\otimes B\psi}$$

$$= \sqrt{\psi^\dagger A^\dagger A\otimes B^\dagger B\,\psi}$$

[illegible]

$$\overset{A^\dagger A \le I}{\le} \sqrt{\psi^\dagger I\otimes B^\dagger B\,\psi}$$

($A^\dagger A \le I$ [illegible])

$$= \|I\otimes B\psi\|$$