שיעור 3, 31/10/13

<u>מדידות</u>

הגדרה: יהיו $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ מרחבי הילברט

$M_k: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ אופרטורים (כך $M_k^\dagger M_k: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$)

כך ש $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$

נאמר ש $M = \{M_k\}_k^n$ הוא מדידה על $\mathcal{H}$

בהינתן מצב $\varphi \in \mathcal{H}$,

מקבלים תוצאה k בהסתברות $p_k = \|M_k \varphi\|^2$

ובהינתן תוצאה k עוברים למצב $\frac{M_k \varphi}{\|M_k \varphi\|} \in \mathcal{H}'$

משפט: כל מדידה כללית ניתנת לביצוע בעזרת [illegible]

ה. [illegible] M [illegible] ניתן לממש ע"י [illegible]

[illegible] $U(\varphi \otimes |0\rangle)$ [illegible]

הוכחה:

תקינות: ברור ש $0 \le p_k \le 1$,
$$\sum_k p_k = \sum_k \varphi^\dagger M_k^\dagger M_k \varphi = \varphi^\dagger \sum_k M_k^\dagger M_k \varphi$$
$$= \varphi^\dagger \varphi = \langle \varphi, \varphi \rangle = \|\varphi\|^2 = 1$$

(ב) מה יש מדידות מהסוג של מרחבים אורתוגונליים U_k, [illegible]

נבחר M_k הטלה על U_k

אז $M_k^\dagger = M_k$ $\quad M_k^\dagger M_k = M_k$

$M_\ell M_k = 0$

ו $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$

$pr(\text{תוצאה } k) = \|M_k \varphi\|^2$

ובהינתן תוצאה k עוברים ל $M_k \varphi$ מנורמל.

ⓐ נתון סדרת מטריצות k

נגדיר $T: H\otimes W \to H'\otimes W$

ע"י

$$T(\varphi\otimes|0\rangle) = \sum_k M_k(\varphi)\otimes|k\rangle$$

הוכחה לינארי (וגם שומר מכפלה).

i. T לינארי

$$T((\varphi_1+\varphi_2)\otimes|0\rangle) = \sum_k M_k(\varphi_1+\varphi_2)\otimes|k\rangle$$

$$=\sum_k (M_k(\varphi_1)+M_k(\varphi_2))\otimes k$$

$$=\sum_k M_k(\varphi_1)\otimes k + \sum_k M_k(\varphi_2)\otimes|k\rangle = T(\varphi_1)+T(\varphi_2)$$

ii. T אוניטרי אם $\varphi_1,\varphi_2\in H$

$$\langle T(\varphi_1\otimes|0\rangle), T(\varphi_2\otimes|0\rangle)\rangle$$

$$=\left(\sum_k M_k(\varphi_1)\otimes|k\rangle\right)^{+} \sum_l M_l(\varphi_2)\otimes|l\rangle$$

$$=\sum_{k,l}\left((M_k(\varphi_1))^{+}\otimes|k\rangle^{+}\right)\cdot(M_l(\varphi_2)\otimes|l\rangle)$$

$$=\sum_{k,l} \cancel{M_k}\varphi_1^{+} M_k^{+} M_l\varphi_2 \cdot \underbrace{\langle k|l\rangle}_{\delta_{k,l}}$$

$$=\sum_k \varphi_1^{+} M_k^{+} M_k\varphi_2 = \varphi_1^{+}\sum_k M_k^{+} M_k \varphi_2 = \varphi_1^{+}\varphi_2 = \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$$

לכן T שומר מכפלה אוניטרי.

ⓑ אם נמדוד את W בבסיס הסטנדרטי

נקבל תוצאה k בהסת' $\|M_k\varphi\|^2$

ואז נהיה ב $M_k\varphi\otimes|k\rangle$ מנורמל.

ⓒ

תרגיל: כל חשובה 1. הומוגניות 2. ... 3. ... ניתן להגיע כמוצגה $\{M_k\}_k$ ב-H.

$M_k=\Pi_k U$

נשים לב שמתאימות לתוצאה הסתברות של k [illegible]
(ואין קריאה במצב נוסף) אז:

$p_k = \| M_k \psi \|^2 = \psi^\dagger M_k^\dagger M_k \psi = \psi^\dagger (M_k^\dagger M_k) \psi$

1) $E_k = M_k^\dagger M_k$ מקיים $E_k \geq 0$
$\sum_k E_k = I$

[תזכורת: מ' A הוא חיובי אם הוא הרמיטי
וקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

1. ע"ע של A הם חיוביים (הם ממשיים כי הוא הרמיטי)
2. לכל v $v^\dagger A v \geq 0$
3. $A = B^\dagger B$ עבור איזה מ' B.]

[illegible] אם יש לנו $\{E_k\}_k$:
כך שלכל k $E_k \geq 0$
ו $\sum_k E_k = I$

אז יש M_k כך ש $E_k = M_k^\dagger M_k$, $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$
והסתברות התוצאה של k על ψ הוא $\psi^\dagger E_k \psi$.

הגדרה: אוסף $\{E_k\}_k$ של מ' כך ש:
1. $E_k \geq 0$
2. $\sum_k E_k = I$ נקרא POVM

כל מדידה $\{M_k\}_k$ כך ש $E_k = M_k^\dagger M_k$
1) $p_k = pr(k\ [illegible]) = \psi^\dagger E_k \psi$

[נשים לב ש $p_k \geq 0$ לפי (2), ו $\sum_k p_k = \psi^\dagger \sum E_k \psi = \psi^\dagger \psi = 1$]

בעיות הבחנה של אורתוגונלי -

דוגמא 1 (לא אורתוגונליים):

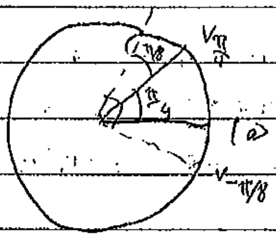
נתון ψ, ידוע ש או $\psi = |0\rangle$ או $\psi = |+\rangle$

מטרתנו להבחין בין 2 המקרים.

אם צדקנו נקבל 1$.

אם " טעינו נפסיד 1$.

אסטרטגיה 1:



נמדוד ב- $\{V_{\frac{\pi}{8}}, V_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$ ונענה בהתאם.

בין אם הוא ψ
" " הוא ψ

$$Pr(\text{נצדק}) = \cos^2\frac{\pi}{8} \approx 0.86$$

$$Pr(\text{נטעה}) = \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$E(\text{רווח}) = \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \boxed{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

בהמשך הקורס (אם יש) אסטרטגיה טובה יותר. (הוכחה?)

$$\rho = |0\rangle\langle 0| - |+\rangle\langle +| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $-x^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$ $\quad x^2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{1}{2}\sum|\lambda_i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

סעיף 2: אם אנחנו בודקים מרובים אז
אנחנו צריכים מספרים ∞.

הסעיף "קודם של אגדה.

סעיף 2 [illegible] |0>, |+>, או יותר
בשלבים |0>, |+> הם נבדקים.
למדוד בבסיס הסטנדרטי
כשאנחנו רואים 1 אז נחזה |+>
" " |0> " "לא יודע"

$pr(\text{טעות} \mid \psi=0) = 0$
$pr(\text{טעות} \mid \psi=+) = \frac{1}{2}$

סעיף 3:

הטלה ל- כן, אם זה קורה בבסיס |1> $E_0 = \alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \alpha\cdot|1\rangle\langle1|$

הטלה ל- |->, " " " |0> $E_- = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \alpha\cdot|-\rangle\langle-|$

$E_{quit} = I - E_0 - E_-$

ברור ש- $E_{quit} \geq 0$

$$E_{quit} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&\alpha\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha/2&-\alpha/2\\-\alpha/2&\alpha/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{\alpha}{2}&\alpha/2\\\alpha/2&1-\frac{3\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

הערה: נבחר α כך שלא משנה מה הקלט בהסת' ≥ 0.29 נענה נכון
ובשאר נענה "לא יודע"

⑤

מטריצת הצפיפות

המצב הקוונטי הכללי הוא מערכת שבהסתברות p_i נמצאת במצב .. $\varphi_i \in \mathcal{H}$

נתונה מערכת $\{p_i, \varphi_i\}$ מטריצה $\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

נשים לב ש: ρ:

1. הרמיטית $\rho^\dagger = \rho$
2. בנוסף קמור ש חיובית [illegible] חיובית

(לכל v, $v^\dagger \rho v = \sum p_i \underbrace{v^\dagger |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| v}_{\geq 0} \geq 0$)

3. עקבה $Tr(\rho) = \sum p_i \underbrace{Tr(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)}_{= \text{כפל פנימי} = 1} = \sum p_i = 1$

→ היחס הוא many → one

לדוג' I הוא מצב של $\{(\frac{1}{2}, |0\rangle), (\frac{1}{2}, |1\rangle)\}$

וגם $\{(\frac{1}{2}, |+\rangle), (\frac{1}{2}, |-\rangle)\}$

– באופן כללי, ρ:

אם $\rho \geq 0$ ועקבה Tr 1,

אז בפירוק לבסיס של ו"ע עצמיים

$\rho = \sum p_i |v_i\rangle\langle v_i|$ עם $0 \leq p_i$, $\sum p_i = 1$

$Tr(\rho) = 1$ כי, $\rho \geq 0$ כי

הם מצב של $\{(p_i, |v_i\rangle)\}$

U: אם היה בתערובת $\{p_i, \varphi_i\}$ $\rho = \sum p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

הפעלנו U, עברנו ל $\{p_i, U\varphi_i\}$

$$\rho' = \sum p_i |U\varphi_i\rangle\langle U\varphi_i|$$

$$= \sum p_i U\varphi_i \varphi_i^\dagger U^\dagger = U \sum p_i \varphi_i \varphi_i^\dagger U^\dagger = \boxed{U\rho U^\dagger}$$

אנסילה: אם הינו בתערובת $\{p_i, \varphi_i\}$

והוספנו אנסילה σ, עברנו ל $\{p_i, \varphi_i \otimes |\sigma\rangle\}$

$$\rho' = \sum p_i |\varphi_i \otimes |\sigma\rangle\rangle \langle \varphi_i \otimes \sigma|$$

$$= \sum p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma| = \rho \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|$$

מדידה: אם הינו בתערובת $\{p_i, \varphi_i\}$ $\rho = \sum p_i \varphi_i^\dagger \varphi_i$

והפעלנו מדידה M_k,

אז הסיכוי k הוא: $p_k = \sum p_i \|M_k \varphi_i\|^2$

$$p_k = \sum p_i \varphi_i^\dagger M_k^\dagger M_k \varphi_i = \sum p_i \operatorname{Tr}(M_k^\dagger M_k \varphi_i \varphi_i^\dagger)$$

$$= \operatorname{Tr}(M_k^\dagger M_k \sum p_i \varphi_i \varphi_i^\dagger) = \operatorname{Tr}(M_k^\dagger M_k \rho) = \operatorname{Tr}(E_k \rho)$$

במצב טהור:

אם הינו במצב φ, והפעלנו מדידה $\{M_k\}$ וקיבלנו k,

מצב חדש $\frac{M_k\varphi}{\|M_k\varphi\|}$

$$\rho' = \frac{M_k \varphi \varphi^\dagger M_k^\dagger}{\|M_k\varphi\|^2} = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{\operatorname{Tr}(E_k \rho)}$$

$\rho = \varphi^\dagger\varphi$

$\sum p_i\varphi_i^\dagger\varphi_i=\rho$ ואם היא תערובת $\{p_i,\varphi_i\}$ קיבלנו תוצאה k, אזי

המצב החדש הוא

$$\sum_i pr(i|k)\,\frac{M_k\varphi_i\varphi_i^\dagger M_k^\dagger}{\underbrace{\|M_k\varphi_i\|^2}_{pr(k|i)}} = \sum_i \frac{pr(\cancel{i},k)}{pr(k)}\cdot\frac{M_k\varphi_i\varphi_i^\dagger M_k^\dagger}{pr(\cancel{i}/k)}\cdot pr(i)$$

$$= \sum_i \frac{p_i\, M_k\varphi_i\varphi_i^\dagger M_k^\dagger}{pr(k)} = \frac{M_k\rho M_k^\dagger}{pr(k)} = \frac{M_k\rho M_k^\dagger}{Tr(E_k\rho)}$$

קיבלנו כמו בנוסחה עבור pure-state

מסקנה: ההעתקה ממערכות $\{p_i,\varphi_i\} \Rightarrow$ d.m

היא

many ⇒ one

הכל מבוסס על כל הפעולות שניתן לעשות במחשב קוונטי

הכל תלוי במצב

לא ניתן להבדיל בין 2 תערובות שונות, בעלי אותו d.m.

ההפך (אם לא כמו כן) ניתן להבדיל בין 2 תערובות בעלי d.m שונה.

Clauser, Horne, Shimony, Holt 69 CHSH game
inequality

המשחק

שני שחקנים A,B
referee

ה referee בוחר באקראי $r\in\{0,1\}$ ושולח ל A
ובוחר $s\in\{0,1\}$ " " B

A מחזיר ביט של r כפונקציה $a(r)=a_r\in\{0,1\}$
B מחזיר " " s " $b(s)=b_s\in\{0,1\}$

A,B מנצחים במשחק אם $r\cdot s=a\oplus b$

מה ההסתברות הכי גבוהה ש A,B
יש להם הסתברות נצחון בהנחה שהם קלאסיים?

① A,B משתמשים באסטרטגיות:
A : לכל r, עונה תשובה מסוימת $a(r)$ כי
כמו כן B

נניח:

$a_0\oplus b_0=0$
$a_0\oplus b_1=0$
$a_1\oplus b_0=0$
$\underline{a_1\oplus b_1=1}$
$\Rightarrow 0\oplus 0=0\oplus 1$ אבל
$0=1$

לכן לכל היותר 3 מתוך 4 ... בו-זמנית
ולכן $Pr_{r,s}(\text{הם מנצחים})\le\frac{3}{4}$

נשים לב שיש 4 ביטים כאלה a_0, a_1, b_0, b_1

Ⓐ A,B הדטרמיניסטיים

$a_0 = \begin{cases} 0 & p_0 \text{ בהסתברות} \\ 1 & 1-p_0 \end{cases}$ $b_0 = \begin{cases} 0 & q_0 \\ 1 & 1-q_0 \end{cases}$

$a_1 = \begin{cases} 0 & p_1 \\ 1 & 1-p_1 \end{cases}$ $b_1 = \begin{cases} 0 & q_1 \\ 1 & 1-q_1 \end{cases}$

לכל שיטה הסתברותית הכי טובה היא להשיג מקסימום 3 מתוך 4

לכן $\Pr$[ניצחון AB] $\leq \frac{3}{4}$

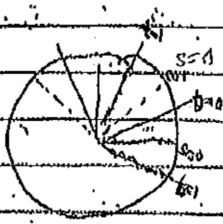
סיכוי ניצחון AB

Max של ההסתברות

Ⓑ AB קוונטיים:

AB: מקיימים EPR-pair

$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right]$



השחקן A: אם קיבל s=0 מודד בבסיס $B_0 = \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{v_0, v_{\frac{\pi}{2}}\}$

אם קיבל s=1 מודד בבסיס $B_{\frac{\pi}{4}} = \{|+\rangle, |-\rangle\} = \{v_{\frac{\pi}{4}}, v_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}\}$

השחקן B: אם קיבל t=0 מודד בבסיס $B_{\frac{\pi}{8}} = \{v_{\frac{\pi}{8}}, v_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

// t=1 // // $B_{-\frac{\pi}{8}} = \{v_{-\frac{\pi}{8}}, v_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

ג) אם A,B קוונטיים

A,B מחזיקים EPR

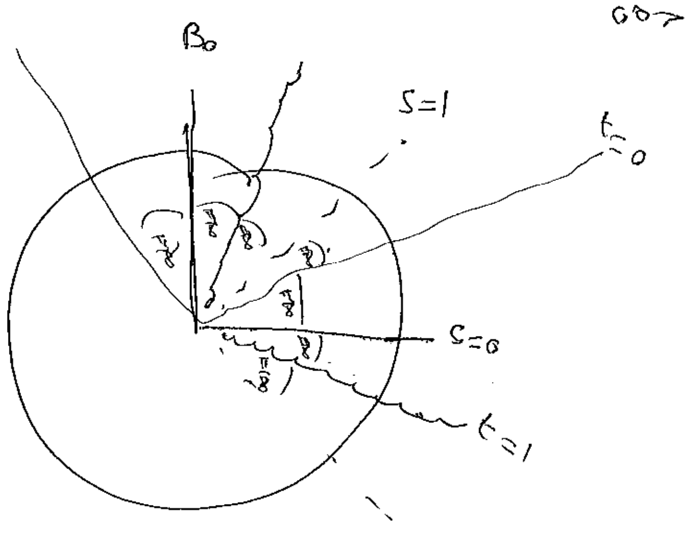
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|00\rangle + |11\rangle\,\right] \;;$$

משחק A: אם $S=0$ מודד בבסיס

$B_0 = \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{V_0, V_{\frac{\pi}{2}}\}$; $|0\rangle$ תשובה 0

$|1\rangle$ " 1.

אם $S=1$ מודד בבסיס



$$B_{\frac{\pi}{4}} = \{|+\rangle, |-\rangle\} = \{V_{-\frac{\pi}{4}}, V_{\frac{\pi}{4}}\}$$

$$V_\theta = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$$

משחק B:

אם $t=0$ מודד בבסיס $\{V_{\frac{\pi}{8}}, V_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

אם $t=1$ מודד בבסיס $\{V_{-\frac{\pi}{8}}, V_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

איך נעשה את התשובה.

נניח על שאלה s, A מבצעת POVM $\{\underset{\text{תשובה }0}{\overset{\downarrow}{A_0^s}}, \underset{\text{תשובה }1}{\overset{\downarrow}{A_1^s}}\}$

"   "   B, t $\{B_0^t, B_1^t\}$

אז ה POVM המשותף הוא

$$\{\underbrace{A_0^s\otimes B_0^t}_{\substack{\text{תשובה}\\(0,0)}}, \underset{(0,1)}{A_0^s\otimes B_1^t}, \underset{(1,0)}{A_1^s\otimes B_0^t}, \underset{(1,1)}{A_1^s\otimes B_1^t}\}$$

[הערה: $\sum_{a,b} A_a^s\otimes B_b^t = \sum_a A_a^s \otimes \sum_b B_b^t = I\otimes I = I$]

כמו במקרה הקלאסי, צריך שהמדידה של נגד יענה

(שתשובות זהות) הן נכונות,

נניח שהשחקנים זוכים ערך המשחק 1

"   מפסידים "   "   -1.

לכן עבור s=t=0 מקבלים את ה POVM

$$\{A_0^0\times B_0^0+A_1^0\otimes B_1^1, A_0^0\otimes B_1^0+B_1^0\otimes B_0^0\} \qquad s=0, t=0$$

$s=0, t=1$

$$A_0^0\otimes B_0^1+A_1^0\otimes B_1^1, A_0^0\otimes B_1^1+A_1^0\otimes B_0^1\}$$

$$A_0^1\otimes B_0^0+A_1^1\otimes B_1^0, A_0^1\otimes B_1^0+A_1^1\otimes B_0^1\} \qquad s=1, t=0$$

$$\underbrace{A_0^1\otimes B_1^1+A_0^1\otimes B_1^1}, A_0^1\otimes B_0^1+A_1^1\otimes B_0^1\} \qquad s=1, t=1$$

נפש קצר.

נסמן

$$A^0 = A^0_0 - A^0_1$$

באופן כללי, אם יש POVM $\{E_i\}$

ולתוצאה i יש ערך λ_i

נגדיר

$$H = \sum \lambda_i E_i$$

נשים לב, שבכל מצב ρ

$$Tr(H\rho) = \sum \lambda_i \underbrace{Tr(E_i\rho)} = \sum \lambda_i \, pr(\text{תוצאה } i) = \boxed{\text{תוחלת ערך התוצאה.}}$$

הכל אם נסמן ערך המשחק לחד. $(-1)^a$

התוצאה - אם נסמן

$$\begin{pmatrix} (-1)^0 = 1 & 0 & \text{תשובה} \\ (-1)^1 = -1 & 1 & " \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$A^0 = A^0_0 - A^0_1$$

[illegible] ב׳

תוחלת ערך המשחק, בהינתן ש A נשאל 0.
(0 נכון ערך 1.
1 הפוך ערך −1)

כנ"ל

$$A^1 = A^1_0 - A^1_1$$

$$B^0 = B^0_0 - B^0_1$$

$$B^1 = B^1_0 - B^1_1$$

[illegible]

$$A^0_0 = |V_0\rangle\langle V_0| = |0\rangle\langle 0| \qquad A^1_0 = |V_{\frac{\pi}{4}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{4}}| = |+\rangle\langle +|$$

$$A^0_1 = |V_{\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{2}}| = |1\rangle\langle 1| \qquad A^1_1 = |V_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}| = |-\rangle\langle -|$$

$$B^0_0 = |V_{\frac{\pi}{8}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{8}}| \qquad B^1_0 = |V_{-\frac{\pi}{8}}\rangle\langle V_{-\frac{\pi}{8}}|$$

$$B^0_1 = |V_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}| \qquad B^1_1 = |V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\rangle\langle V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}|$$

ולכן:

$$|V_\alpha\rangle\langle V_\alpha| = \big(c(\alpha)|0\rangle + s(\alpha)|1\rangle\big)\big(c(\alpha)\langle 0| + s(\alpha)\langle 1|\big)$$

$$= \begin{pmatrix} c^2(\alpha) & c(\alpha)\,s(\alpha) \\ s(\alpha)\,c(\alpha) & s^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$|V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}| = \begin{pmatrix} c^2(\alpha+\frac{\pi}{2}) & c(\alpha+\frac{\pi}{2})\,s(\alpha+\frac{\pi}{2}) \\ s(\alpha+\frac{\pi}{2})\,c(\alpha+\frac{\pi}{2}) & s^2(\alpha+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$c(\alpha+\tfrac{\pi}{2}) = -s(\alpha)$$
$$s(\alpha+\tfrac{\pi}{2}) = c(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} s^2(\alpha) & -s(\alpha)\,c(\alpha) \\ -s(\alpha)\,c(\alpha) & c^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

[illegible]

$$H_\alpha = |V_\alpha\rangle\langle V_\alpha| - |V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\rangle\langle V_{\alpha+\frac{\pi}{2}}|$$

$$= \begin{pmatrix} c^2(\alpha) - s^2(\alpha) & s(2\alpha) \\ s(2\alpha) & s^2(\alpha) - c^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(2\alpha) & s(2\alpha) \\ s(2\alpha) & -c(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Goal!

$$A^0 = A^0_0 - A^0_1 = H_{\underset{\alpha=0}{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

$$A^1 = A^1_0 - A^1_1 = H_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} c^2(\frac{\pi}{4}) - s^2(\frac{\pi}{4}) & s(\frac{\pi}{2}) \\ s(\frac{\pi}{2}) & s^2(\frac{\pi}{4}) - c^2(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -$

$$B^0 = B^0_0 - B^0_1 = H_{\frac{\pi}{8}} = \begin{pmatrix} \cancel{c^2(\frac{\pi}{8}) - s^2(\frac{\pi}{8})} \; c(\frac{\pi}{4}) & s(\frac{\pi}{4}) \\ s(\frac{\pi}{4}) & -c(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^1 = B^1_0 - B^1_1 = H_{-\frac{\pi}{8}} = \begin{pmatrix} c(-\frac{\pi}{4}) & s(-\frac{\pi}{4}) \\ s(-\frac{\pi}{4}) & -c(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$c(\alpha) = c(-\alpha)$

$s(\alpha) = -s(\alpha)$

אם עכשיו נמדד את $A^0 \otimes B^0$,

אז הם יגיעו למצב המתואר ב $s=0$, $t=0$

וערך המשחק, כמו קודם, יהיה של ו"ע $v \otimes w$,

עם ע"ע $\lambda_v \cdot \lambda_w$, כי $(A \otimes B)(v \otimes w) = (Av) \otimes (Bv) = \lambda_v \lambda_w (v \otimes w)$.

כלומר $(-1)^{x_1} \cdot (-1)^{x_2} = (-1)^{x_1 \oplus x_2}$

<u>והסבר:</u> אנו מנצחים $1 = (-1)^0$ אם $x_1 \oplus x_2 = 0$

ומפסידים אם $-1 = (-1)^1$ $x_1 \oplus x_2 = 1$

מען e $A^0 \otimes B^0$ מתאים ל- <u>תוצאת הניצחון/הפסד</u>

הניסוי שקורה כש $s=0$, $t=0$. ניצחון נקרא <u>$a \oplus b = 0$</u>

כנ"ל $A^0 \otimes B^1$ עבור הניסוי $s=0$, $t=1$

" " $A^1 \otimes B^0$ $s=1$, $t=0$

עבור $A^1 \otimes B^1$ – ניצחון – $\oplus = 0$

הפסד – $\oplus = 1$ } הפוך מהניצחון המשחק

$a \oplus b = s \cdot t$
1

ולכן תוצאת הניצחון המשחק $a \oplus b = s \cdot t$

כאן

$$H = \frac{1}{4}\left[\underbrace{A^0 \otimes B^0}_{\text{קורה } s=t=0} + \underbrace{A^0 \otimes B^1}_{\text{קורה } s=0,\ t=1} + \underbrace{A^1 \otimes B^0}_{\text{קורה } s=1,\ t=0} - \underbrace{A^1 \otimes B^1}_{\text{קורה } s=1,\ t=1} \right]$$

H (חשב לו

$$H = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} B^0 & 0 \\ 0 & -B^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & -B^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B^0 \\ B^0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B^1 \\ B^1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$A^0\otimes B^0$ $\quad A^0\otimes B^1$ $\quad A^1\otimes B^0$ $\quad A^1\otimes B^1$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{matrix} B^0+B^1 & B^0-B^1 \\ B^0-B^1 & -(B^0+B^1) \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$pr(\text{נצחון}) - pr(\text{הפסד}) = Tr(H\rho)$$

$$\rho = |EPR\rangle\langle EPR| = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)\left(\langle 00| + \langle 11|\right)$$ e0

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(חשבו:

$$Tr(H\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[2+0+0+2\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} = pr(\text{נצחון}) - pr(\text{הפסד})$$

לכן:

$$pr(\text{נצחון}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \sim \underline{0.86}$$

[illegible] Tsirelson's bound

[illegible] A_0, A_1, B_0, B_1 [illegible]

[illegible] Ψ [illegible] 1

$|\langle\Psi| A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1 |\Psi\rangle| \le 2\sqrt{2}$

[illegible] A_i, B_i [illegible] Ψ [illegible]

[illegible]

[illegible] A [illegible]

[illegible]

[illegible] $V=(V_1,\dots,V_k)$ $\|V\| = \sqrt{\sum V_i^2}$

[illegible] A $\|A\| = \max_V \frac{\|AV\|}{\|V\|}$

[illegible] $A\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots \\ V_k\end{pmatrix}$ [illegible]

[illegible] A [illegible] $\|A\| = \max_i |\lambda_i(A)| = \lambda_1(A)$

[illegible]

$\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

$\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$

$\|A\otimes B\| = \|A\|\cdot\|B\|$

[illegible] $A\otimes B$

[illegible]

[illegible]

$|\sum V_i W_i| \le \|V\|\cdot\|W\|$

$|\sum V_i W_i| \le \sqrt{\sum |V_i|^2}\,\sqrt{\sum |W_i|^2}$

[illegible]

(19)

$\langle \psi | A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 | \psi \rangle$

[illegible] $\leq \| (A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_1 - A_1 \otimes B_1) |\psi\rangle \|$

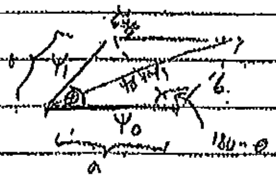
[illegible] $\leq \| (A_0 \otimes (B_0 + B_1)) \psi \| + \| (A_1 \otimes (B_0 - B_1)) \psi \|$

[illegible] $\leq \| (I \otimes (B_0 + B_1)) \psi \| + \| (I \otimes (B_0 - B_1)) \psi \|$

$= \| \psi_0 + \psi_1 \| + \| \psi_0 - \psi_1 \|$

$\psi_1 = (I \otimes B_1) \psi \ , \ \psi_0 = (I_{A_0} \otimes B_0) \psi$ [illegible]

$\|\psi_1\| \leq 1 \quad$ [illegible] $\quad \|\psi_0\| = \| I \otimes B_0 \, \psi \| \leq \| I \otimes B_0 \| \cdot \underset{\uparrow}{\|\psi\|} \leq \| I \| \cdot \| B_0 \| \leq 1$



$\underbrace{\| \psi_0 + \psi_1 \|} + \underbrace{\| \psi_0 - \psi_1 \|} =$ [illegible]

$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(180 - \theta)} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta}$

$\overset{\downarrow}{\leq} \sqrt{2 + 2\cos\theta} + \sqrt{2 - 2\cos\theta}$ $\qquad \frac{\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle}{\|\psi_1\| \cdot \|\psi_0\|} = \cos\theta$ [illegible]

$|a| \leq |b| \leq 1$

$\overset{\downarrow}{\leq} \quad 2\sqrt{2}$

max $\cos\theta = 0 \qquad \psi_0 \perp \psi_1$

$\psi_1 \rfloor \psi_0$

(20)

[illegible]

$$\| A \otimes B \psi \| = \sqrt{\psi^{+} (A \otimes B)^{+} A \otimes B \psi}$$

$$= \sqrt{\psi^{+} A^{+}A \otimes B^{+}B \psi}$$

$\downarrow$

[illegible]

$A^{+}A = I$

$$= \sqrt{\psi^{+} I \otimes B^{+}B \psi}$$

($A^{+}A \leq I'$ [illegible])

$$= \| I \otimes B \psi \|$$