שיעור 2 24/10/13

תזכורת [illegible]

חישוב קוונטי על n qubits
$|v\rangle$

סופר-פוזיציה, pure state: $v \in \mathcal{H}_{2^n}$, $\|v\|=1$

$\mathcal{H}_D$ זה מימד D מעל $\mathbb{C}$,
עם מכפלה פנימית $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{D} \bar{v}_i w_i$

חישוב מותר: הפעלה של טרנספורמציה אוניטרית

$$U: \mathcal{H}_{2^n} \to \mathcal{H}_{2^n}$$

מצב v, עובר למצב Uv

מדידת הטלה: חלוקה של $\mathcal{H}_{2^n}$ לתתי מרחבים אורתוגונלים

$$\mathcal{H}_{2^n} = V_1 \oplus \dots \oplus V_k \qquad V_i \perp V_j \quad i \neq j$$

תוצאות המדידה היא אינדקס

$\Pr(\text{תוצאה } i \text{ בהינתן מצב } v) = |\Pi_i v|^2$

Π_i זה ההטלה על V_i (1)

ונבחין שהקשר ין המצב קרס לאבי המחס

$$\frac{\Pi_i v}{|\Pi_i v|}$$

Super dense coding

נניח A,B חולקים מצב $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$

A מעוניין שני ביטים קלסיים $x_1,x_2\in\{0,1\}$

ורוצה לשדר אותם לבוב

נראה ש A יכולה לשדר בעזרת 1 ביט קוונטי אחד

$$\boxed{EPR + \cancel{\ } 1\text{ qubit} = 2\text{ bits}}$$

של תוי
$x=x_1x_2$

הפרוטוקול:

המצב

אם $x=00$, A לא עושה כלום I $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$

$x=01$ A מפעילה את Z על ה qubit שלה $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle-|11\rangle]$

$x=10$ A מפעילה $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}[|10\rangle+|01\rangle]$

$x=11$ $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}[-|10\rangle+|01\rangle]$

ב 4 המקרים המצבים ניצבים זה לזה
ולכן B יכול למדוד, ולגלות את $x=x_1x_2$.

מכפלה טנזורית

יהיו V,W מ"ו.

נגדיר $V\otimes W = \mathrm{span}\{ v\otimes w \mid v\in V,\ w\in W\}$

המכפלה $\otimes$ מקיימת:

1. $(\lambda v)\otimes w = \lambda(v\otimes w) = v\otimes(\lambda w)$
2. $(v_1+v_2)\otimes w = v_1\otimes w + v_2\otimes w$
3. $v\otimes(w_1+w_2) = v\otimes w_1 + v\otimes w_2$

טענות על $V\otimes W$

א. אם V נפרש ע"י $v_1,\dots,v_n$
W " " $w_1,\dots,w_m$
אז $V\otimes W$ נפרש ע"י $v_i\otimes w_j$

כי כל $V\otimes W$ ניתן להצגה כ

$$\left(\sum \alpha_i v_i\right)\otimes \sum \beta_j w_j = \sum \alpha_i\beta_j (v_i\otimes w_j)$$

ב. אם $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V
$w_1,\dots,w_m$ " W
אז $v_i\otimes w_j$ בסיס של $V\otimes W$.

ג. אם V מרחב מכפלה פנימית
W " " "

נגדיר $\langle v_1\otimes w_1, v_2\otimes w_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle\cdot\langle w_1,w_2\rangle$

ומרחיבים ע"י

$$\left\langle \sum \alpha_{ij} (v_i^1\otimes w_j^1), \sum \beta_{kl} (v_k^2\otimes w_l^2)\right\rangle = \sum \overline{\alpha_{ij}}\beta_{kl} \langle v_i^1\otimes w_j^1, v_k^2\otimes w_l^2\rangle$$

אין לנו מה' (המכפלה מוגדרת היטב)

<u>דוגמא</u>!: $H_2 \otimes H_2$

מ' ממימד 4

בסיס

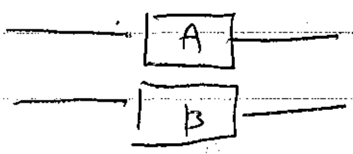
$|0\rangle \otimes |0\rangle = |0,0\rangle$

$|0\rangle \otimes |1\rangle = |0,1\rangle$

$|1\rangle \otimes |0\rangle = |1,0\rangle$

$|1\rangle \otimes |1\rangle = |1,1\rangle$

$\langle 0,0 | 0,1\rangle = \langle 0,0\rangle \cdot \langle 0,1\rangle = 1 \cdot 0 = 0$



טרנספורמציה שמסומנת ב- $A \otimes B$

כיון ש $A \otimes B$ לינ', מספיק לראות איך היא מוגדרת על איברי בסיס. על הבסיס $|i\rangle \otimes |j\rangle$

$A \otimes B : \quad |i\rangle \otimes |j\rangle \rightarrow |A_i\rangle \otimes |B_j\rangle$

מהי המטריצה של $A \otimes B$?

$$(A \otimes B)_{(i,j)(k,l)} = \langle |i\rangle \otimes |j\rangle \,|\, A \otimes B \,|\, |k\rangle \otimes |l\rangle \rangle$$
$$= \langle |i\rangle \otimes |j\rangle \,|\, A|k\rangle \otimes B|l\rangle \rangle$$

$$= \langle i | A | k \rangle \cdot \langle j | B | l \rangle$$

$$= A_{ik} \cdot B_{jl}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ [illegible]

$$H \otimes H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H \otimes H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H \otimes H \; |0,0\rangle = H(|0\rangle) \otimes H(|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}\left[|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right]$$

$$H \otimes H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

תכונה: אם A, B אוניטריים אז

אז

$$(A \otimes B)^{\dagger} = A^{\dagger} \otimes B^{\dagger}$$

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = A \cdot C \otimes BD$$

להראות אם A, B אוניטריים אז

$$(A \otimes B) \cdot (A \otimes B)^{\dagger} = (A \otimes B) \cdot (A^{\dagger} \otimes B^{\dagger}) = AA^{\dagger} \otimes BB^{\dagger} = I \otimes I = I$$

לכן $A \otimes B$ אוניטרי:

6

דוגמא 2 Teleportation

A,B חולקים EPR ; $\frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle]$

A "מחזיקה" מצב קוונטי $\varphi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$;

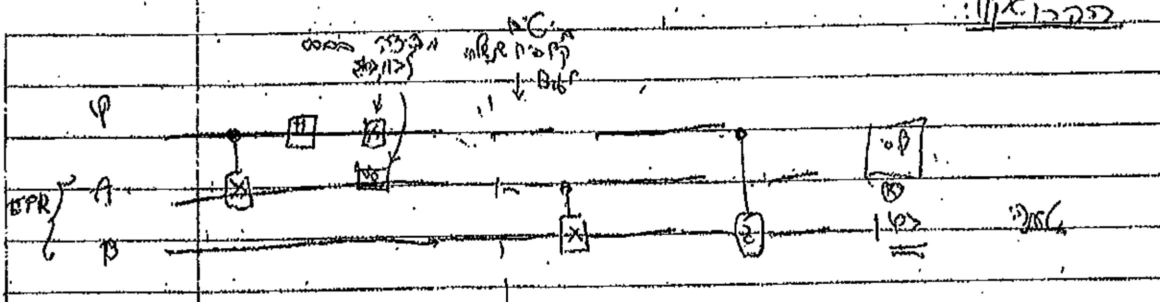
הוא רוצה להעביר אותו ל Bob (ללא מדידה)

כמה ביטים צריך:

1. זוג EPR

2. תקשורת קלאסית (מעביר 2 ביטים) תקשורת קלאסית

הפרוטוקול:



$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

בהתחלה:

$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha[|000\rangle + |011\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}}[|100\rangle + |111\rangle]$

אחרי CNOT:

$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}[|000\rangle + |011\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}}[|110\rangle + |101\rangle]$

אחרי H:

$\frac{\alpha}{2}[|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle]$

$+ \frac{\beta}{2}[|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle]$

2 מדידות

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ ש ψ [illegible] — 0 0

$\frac{\alpha}{2}|1\rangle \quad \frac{\beta}{2}|0\rangle$ — 0 1

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ ש ψ X [illegible]

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle - \frac{\beta}{2}|1\rangle$ — 1 0

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ ש ψ Z [illegible]

$\frac{\alpha}{2}|1\rangle - \frac{\beta}{2}|0\rangle$ — 1 1

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ ZX [illegible] superdense coding entanglement

$\psi \in H_A \otimes H_B$ נקרא מצב [illegible] אם $\psi = v \otimes w$

עבור $v \in H_A$, $w \in H_B$. אחרת, הוא נקרא entangled.

[illegible] "entangled" [illegible]

לדוגמא $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ הוא לא מכפלה

הוכחה: נניח $v = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

$w = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$

$v \otimes w = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$

אם $\varphi = v \otimes w$

אז $\alpha\gamma = \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (1)

$\alpha\delta = \beta\gamma = 0$

ולכן [illegible] בסתירה ל-(1)

$\frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle]$ נקרא EPR-pair על שם איינשטיין-פודולסקי-רוזן

No cloning Thm

משפט: אין יונ' A על $\mathcal{H}_{2^2}$ כך שלכל $\varphi \in \mathcal{H}_2$

$$(*) \qquad A\left(|\varphi\rangle \otimes |0\rangle\right) = |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$$

הוכחה: נניח ש e_0, e_1 בסיס של $\mathcal{H}_2$, ולקיים לפי ההגדרה (*)

$$A\left(|e_i\rangle \otimes |0\rangle\right) = |e_i\rangle \otimes |e_i\rangle$$

בפרט:

$$A\left(|e_0\rangle \otimes |0\rangle\right) = |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle$$
$$A\left(|e_1\rangle \otimes |0\rangle\right) = |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle$$

A אוניטרית, לכן: $\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$

$$\langle e_0, e_1\rangle = \langle e_0, 0 | e_1, 0\rangle = \langle e_0, e_0 | e_1, e_1\rangle = \langle e_0, e_1\rangle \langle e_0, e_1\rangle$$

לכן $\langle e_0, e_1\rangle \in \{0,1\}$, כלומר או $e_0 = e_1$ או $e_0 \perp e_1$. $\square$

Clauser, Horne, Shimony, Holt '69 — CHSH game inequality

המשחק:

יש שחקנים A, B
referee

ה-Referee בוחר שאלה $r \in \{0,1\}$ ושולח ל-A
ושאלה $s \in \{0,1\}$ " " B

A מחזיר תשובה $a(r) = a_r \in \{0,1\}$
B מחזיר " " s " $b(s) = b_s \in \{0,1\}$

A, B מנצחים במשחק אם $r \cdot s = a \oplus b$

מה האסטרטגיה הטובה ביותר ל-A, B
ומה ההסתברות לנצח [illegible]?

(1) A, B מבוצע דטרמיניסטית
A [illegible] [illegible] r [illegible] תשובה [illegible] $a(r)$ כי
[illegible] B [illegible]

צריך:

$a_0 \oplus b_0 = 0$
$a_0 \oplus b_1 = 0$
$a_1 \oplus b_0 = 0$
$a_1 \oplus b_1 = 1$

אבל $\Rightarrow$ $0 \oplus 0 = 0 \oplus 1$

$0 = 1$

לכן לכל [illegible] 3 שאלות [illegible] [illegible]
[illegible] $\Pr_{r,s}(\text{שהם מנצחים}) \le \frac{3}{4}$

ונגיד שאין יש כבר ערכי אסטרטגיה a_0, a_1, b_0, b_1

(א) A,B הסתברותיים

$$a_0 = \begin{cases} 0 & p_0 \text{ בהסתברות} \\ 1 & 1-p_0 \end{cases} \qquad b_0 = \begin{cases} 0 & q_0 \\ 1 & 1-q_0 \end{cases}$$

$$a_1 = \begin{cases} 0 & p_1 \\ 1 & 1-p_1 \end{cases} \qquad b_1 = \begin{cases} 0 & q_1 \\ 1 & 1-q_1 \end{cases}$$

גם עבור הסתברותיים הם לא יכולים לנצח בהסתברות גבוהה יותר

אז $\Pr_{s,t}[\text{מנצחים } AB] \le \frac{3}{4}$

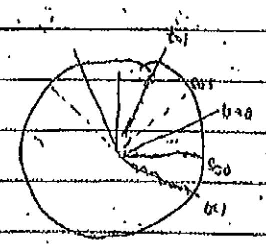
אסטרטגיית AB

max של דטרמיניסטי

(ב) AB קוונטים:

A,B: חולקים EPR-pair

$$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right]$$



A: אם קיבל $s=0$ מודד

בבסיס $B_0 = \{|0\rangle, |1\rangle\}$

$= \{v_0, v_{\frac{\pi}{2}}\}$

אם קיבל $s=1$ מודד

בבסיס $B_{\frac{\pi}{4}} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$

$= \{v_{\frac{\pi}{4}}, v_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}\}$

B: אם קיבל $t=0$ מודד בבסיס $B_{\frac{\pi}{8}} = \{v_{\frac{\pi}{8}}, v_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

$B_{-\frac{\pi}{8}} = \{v_{-\frac{\pi}{8}}, v_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

משפט אינשטיין

דרך נוספת לתאר את המדידות:

דרך אחרת לייצג מדידה

נניח שיש מדידה בבסיס $\{v_1, v_2\}$, $v_1 \perp v_2$

אם נקבל v_1 – נוציא תוצאה λ_1, ואם v_2 – λ_2

נגדיר את המטריצה H : $H = \lambda_1 |v_1\rangle\langle v_1| + \lambda_2 |v_2\rangle\langle v_2|$

H הרמיטית.

[illegible] H .. [illegible] של המטריצה

[illegible] H של [illegible]

[illegible]

למשל אם A נמדד בבסיס: $|0\rangle$ (תוצאה 1)

$|1\rangle$ (" -1)

אז המטריצה $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

אם A נמדד בבסיס $V_{\frac{\pi}{4}}$ תוצאה 1, $V_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}$ -1

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$

אם B נמדד בבסיס $V_{\frac{\pi}{8}}$ – 1, $V_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}}$ -1 $\quad B_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

B $V_{-\frac{\pi}{8}}$ 1, $V_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}}$ -1 $\quad B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

13

יהי H הוא observable עם וקטורים עצמיים W_i וע"ע λ_i

ו-v וקטור (נשתמש בבסיס של הוקטורים העצמיים של H)

$$v = \sum \alpha_i v_i$$

אז $$H v = \sum \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$v^\dagger H v = \langle \sum \alpha_i v_i , \sum_j \alpha_j \lambda_j v_j \rangle = \sum \alpha_i^\dagger \alpha_j \lambda_j \langle v_i , v_j \rangle = \sum |\alpha_i|^2 \lambda_i$$

ההסתברות שמדידת v תניב W_i = ההסתברות [illegible] הערך שמקבלים

לכן $v^\dagger H v$ = תוחלת הערך המתקבל במדידה

נחזור ל CHSH, [illegible] B A [illegible]

[illegible] 1 [illegible]

($x \Rightarrow (-1)^x$ [illegible]) [illegible] A_0

[illegible] $A_0 \otimes B_0$ (A_0, B_0 [illegible]

[illegible] $A_0 \otimes B_0$ [illegible]

עבור a,b [illegible] v_i (w_j) [illegible] λ (μ_j

[illegible] $v_i \otimes w_j$ [illegible] $\lambda_i \mu_j$

[illegible] $v_i \otimes w_j$ [illegible] $(-1)^x \cdot (-1)^y = (-1)^{x \oplus y}$

[illegible] 1 [illegible] $x \oplus y = 0$ (A [illegible] B [illegible])

-1 [illegible] $x \oplus y = 1$ ([illegible])

$$\langle \psi | A_0 \otimes B_0 | \psi \rangle = E(A_0 \otimes B_0) = pr(\text{[illegible]} \mid s=t=0) - pr(\text{[illegible]} \mid s=t=0)$$

[illegible] $s=i$, $t=j$ [illegible]

[illegible] $E(A_i \otimes B_j) = pr(x=y \mid s=i, t=j) - pr(x \neq y \mid s=i, t=j)$

[illegible]

$= pr($ [illegible] $) - pr($ [illegible] $)$

$= \left[pr(\text{[illegible]}) - pr(\text{[illegible]}) \right]$

$pr(\text{[illegible]}) - pr(\text{[illegible]}) =$ [illegible]

$\frac{1}{4} \boxed{\langle\Psi| A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1 |\Psi\rangle}$

$\Psi = EPR$ [illegible]

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \langle\Psi| A_0\otimes B_0|\Psi\rangle = \langle\Psi| A_0\otimes B_1|\Psi\rangle = \langle\Psi| A_1\otimes B_0|\Psi\rangle = -\langle\Psi| A_1\otimes B_1|\Psi\rangle$

$pr(\text{[illegible]}) = \frac{1}{2} + \varepsilon$ [illegible]

$pr(\text{[illegible]}) = \frac{1}{2} - \varepsilon$

$2\varepsilon = (\frac{1}{2}+\varepsilon) - (\frac{1}{2}-\varepsilon) = pr(\text{[illegible]}) - pr(\text{[illegible]}) = \frac{1}{4}\left[4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$pr(\text{[illegible]}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\cos^2\frac{\pi}{8}}$

[illegible]

$pr(\text{[illegible]}) - pr(\text{[illegible]}) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}\,(1\,0\,0\,1)\;\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{8}\,(1\,0\,0\,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\cdot 4}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\,0\,0\,1)}_{\Psi}\;\underbrace{\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1}\;\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\Psi}$

[illegible]

13

15

$\langle\Psi| \underbrace{A_0\otimes B_0}|\Psi\rangle = 1$ [illegible]

$\frac{1}{2}\cdot(1\,0\,0\,1)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

הוכחת חסם Tsirelson's bound

יהיו אופ' הרמיטיים A_0, A_1, B_0, B_1 עם ע"ע ± 1

יהי ψ וקטור נורמה 1

אזי $|\langle\psi| A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1 |\psi\rangle| \le 2\sqrt{2}$

בפרט: זה נכון גם כשמשתמשים ב- A_i, B_i, ψ שאינם ... 2, ...

(כלומר כשמשתמשים בשזירה ...)

לפני שנוכיח את המשפט נגדיר נורמה של אופרטור

מושג טכני הכרחי להמשך

נורמה וקטור: נורמה אוקלידית $v=(v_1,\dots,v_k)$ $\|v\| = \sqrt{\sum v_i^2}$

נורמה של אופרטור A $\|A\| = \max_v \frac{\|Av\|}{\|v\|}$

מה שמשנה זה $A\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}$ שינוי הקואורדינטות ...

תכונות: אם A הרמיטי אז $\|A\| = \max_i |\lambda_i(A)| \stackrel{?}{=} \lambda_1(A)$

תכונות:

$\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

$\|A\otimes B\| = \|A\|\cdot\|B\|$

(נראה את הוכחה של $A\otimes B$)

[illegible] $(|\lambda| \le \|A\|)$

קושי שוורץ: $|\langle v|w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$

$|\sum v_i w_i| \le \sqrt{\sum|v_i|^2}\sqrt{\sum|w_i|^2}$

$\langle \Psi | A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1 |\Psi\rangle$

$\le \| (A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1)|\Psi\rangle \|$

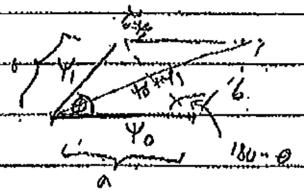
$\le \| (A_0\otimes (B_0+B_1))\Psi \| + \| (A_1\otimes (B_0-B_1))\Psi \|$

$\le \| (I\otimes (B_0+B_1))\Psi \| + \| (I\otimes (B_0-B_1))\Psi \|$

$= \| \Psi_0+\Psi_1 \| + \| \Psi_0-\Psi_1 \|$

$\Psi_1 = (I\otimes B_1)\Psi \ , \ \Psi_0 = (I\otimes B_0)\Psi$

$\|\Psi_1\| \le 1 \quad \|\Psi_0\| = \| I\otimes B_0 \Psi \| \le \| I\otimes B_0 \| \cdot \|\Psi\| \le \|I\| \, \|B_0\| \le 1$



$\underbrace{\| \Psi_0+\Psi_1 \|} + \underbrace{\| \Psi_0-\Psi_1 \|} =$

$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(180-\theta)} + \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$

$= \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} + \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$

$\le \sqrt{2+2\cos\theta} + \sqrt{2-2\cos\theta}$ $\qquad \frac{|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|}{\|\Psi_1\|\cdot\|\Psi_0\|} = \cos\theta$

$|a| = |b| = 1$

$\le 2\sqrt{2}$

Max calculus $\cos\theta = 0$ $\qquad \Psi_0 \perp \Psi_1$

17

(לפי ה' מהשוויון הקודם:

$$\| A \otimes B \Psi \| = \sqrt{\Psi^\dagger (A \otimes B)^\dagger A \otimes B \Psi}$$

$$= \sqrt{\Psi^\dagger A^\dagger A \otimes B^\dagger B \Psi}$$

מתקיים ש
$A^\dagger A = I$

$$= \sqrt{\Psi^\dagger I \otimes B^\dagger B \Psi}$$

($A^\dagger A \leq I$ גם אם לא)

$$= \| I \otimes B \Psi \|$$