Fidelity

הגדרה: יהיו ρ_0, ρ_1 dim על $\mathcal{H}$

[illegible] $F(\rho_0,\rho_1) \stackrel{\Delta}{=} \sup |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2$

ψ_0 טוהר של ρ_0
ψ_1 " " ρ_1

(Ancilla) כאשר ה sup הוא על כל המרחבים המורחבים A, ולכל שני מצבים טהורים ψ_0, ψ_1 ב $\mathcal{H}\otimes A$ כך ש

$Tr_A |\psi_0\rangle\langle\psi_0| = \rho_0$

$Tr_A |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \rho_1$

משפט: ה sup מושג עבור מרחב הרחבה A עם $\dim(A) \le \dim(\mathcal{H})$

משפט: לכל טוהר ψ_0 של ρ_0 ב $\mathcal{H}\otimes A$
יש טוהר ψ_1 של ρ_1 ב $\mathcal{H}\otimes A$
כך ש $|\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2 = F(\rho_0,\rho_1)$

הוכחה: נניח $F(\rho_0,\rho_1)$ מושג ע״י $\tilde\psi_0, \tilde\psi_1$ ב $\mathcal{H}\otimes A$

כיון ש $Tr_A(|\tilde\psi_0\rangle\langle\tilde\psi_0|) = Tr_A(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|)$

יש U יוניטרי על A כך ש $(I_{\mathcal{H}}\otimes U): \tilde\psi_0 \to \psi_0$
ונגדיר $\psi_1 = (I\otimes U)\tilde\psi_1$

(שים לב: יוניטרי U על A) אז $Tr_A |\tilde\psi_1\rangle\langle\tilde\psi_1| = \rho_1 = Tr_A |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$

ו $|\langle\psi_1|\psi_0\rangle|^2 = |\langle (I\otimes U)\tilde\psi_1 | (I\otimes U)\tilde\psi_0\rangle|^2 = |\langle\tilde\psi_1|\tilde\psi_0\rangle|^2 = F(\rho_0,\rho_1)$ ■ (סוף הוכחה)

1

$$F(\rho_0,\rho_1)=\left[\|\sqrt{\rho_0}\,\sqrt{\rho_1}\|_{tr}\right]^2$$ (Uhlmann '70s) משפט

משפט: 1. לכל ρ_0,ρ_1 מתקיים $0\le F(\rho_0,\rho_1)\le 1$, $F(\rho_0,\rho_1)=F(\rho_1,\rho_0)$ (סימטריה)

2. $F(\rho,\rho)=1$,

3. אם $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ אז $F(\rho,\sigma)=\langle\psi|\sigma|\psi\rangle$

4. אם $\rho_0=|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, $\rho_1=|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ אז $F(\rho_0,\rho_1)=|\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2$

הוכחה ל-3: נקבל

$$F(\rho,\sigma)=\Big[\|\underbrace{\sqrt{\rho}}_{\sqrt{\rho}=\rho}\sqrt{\sigma}\|_{tr}\Big]^2=\Big[\mathrm{Tr}\sqrt{\underbrace{\rho\sqrt{\sigma}}_{A}\underbrace{\sqrt{\sigma}\rho}_{A^*}}\Big]^2$$

$$=\Big[\mathrm{Tr}\sqrt{|\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\sigma|\psi\rangle}_{\text{סקלר}}\langle\psi|}\Big]^2=|\langle\psi|\sigma|\psi\rangle|\cdot\Big[\underbrace{\mathrm{Tr}\sqrt{\underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_{|\psi\rangle\langle\psi|}}}_{1}\Big]^2$$

$$=|\langle\psi|\sigma|\psi\rangle|=\langle\psi|\sigma|\psi\rangle$$

4. נובע מ-3. □

משפט: Fuchs & van de Graaf '99

$$1-\sqrt{F(\rho_0,\rho_1)}\le\frac{1}{2}\|\rho_0-\rho_1\|_{tr}\le\sqrt{1-F(\rho_0,\rho_1)}$$

מקרים פרטיים:

אם p, q התפלגויות

$$F(p,q) = F\Big(\underbrace{\sum p_i |i\rangle\langle i|}_{\rho_1},\ \underbrace{\sum q_i |i\rangle\langle i|}_{\rho_2}\Big)$$

$$= \| \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\sqrt{\rho_1}\,\rho_2\sqrt{\rho_1}}\right)\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\rho_1\rho_2}\right)^2 = \left[\sum \sqrt{p_i q_i}\right]^2$$

ρ_1,ρ_2 מתחלפים

משפט: אם ρ_1,ρ_2 [illegible] אז [illegible]

1. [illegible]

$$\| U A U^{+} \|_{tr} = \| A \|_{tr}$$

$$F(\rho_1,\rho_2) = F(U\rho_1 U^{+}, U\rho_2 U^{+})$$

[illegible]

2.

$$\| \rho_1 - \rho_2 \|_{tr} = \max_{\text{POVM } E_m} \left| E(\rho_1) - E(\rho_2) \right|_1$$

$$F(\rho_1,\rho_2) = \min_{\text{POVM}_E} F\left(E(\rho_1), E(\rho_2)\right)$$

[illegible] fidelity

3. אם [illegible] קוונטי $\mathcal{E}$ (כולל מדידה + עיבוד)

$$\| \mathcal{E}\rho_1 - \mathcal{E}\rho_2 \|_{tr} \leq \| \rho_1 - \rho_2 \|_{tr}$$

$$F(\mathcal{E}\rho_1, \mathcal{E}\rho_2) \geq F(\rho_1,\rho_2)$$

NC 9.92

4. $$\sqrt{F}\left(\sum p_i \rho_i,\ \sum q_i \sigma_i\right) \geq \sum_i \sqrt{p_i q_i}\,\sqrt{F(\rho_i,\sigma_i)}$$

[illegible]

(9)

coin flipping

1. A בוחר $a \in_R \{0,1\}$
מכין $\Psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|aa\rangle + |22\rangle\right]$
שולח qubit ראשון ל B.

2. B בוחר $b \in_R \{0,1\}$ שולח ל A

3. A שולח a ל B
וגם qubit שני
התוצאה: $a \oplus b$

4. B בודק Ψ_{aa} ו $\Psi_a^{\perp}$ ...
התוצאה $a \oplus b$

1. אם שניהם הוגנים $Pr[\text{זוכה } A] = \frac{1}{2}$

2. אם A הוגן ו B רמאי:

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 0 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \rho_1 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rho_0 - \rho_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \qquad \|\rho_0 - \rho_1\|_{tr} = 1$$

$$Pr[\text{זוכה } B] \le \frac{1}{2} + \frac{\|\rho_0 - \rho_1\|_{tr}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

[illegible] B [illegible] A [illegible]

<u>[illegible] 1.1</u>

[illegible] A [illegible] a [illegible] Ψ_a

[illegible] b [illegible] a [illegible] qutrit [illegible]

[illegible] 1 [illegible] qutrit [illegible]

$$p_r\left[\text{[illegible]}\right] = \underset{\downarrow}{\frac{1}{2}} + \underset{\downarrow}{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left|\langle \Psi_a, \Psi_{1-a} \rangle\right|^2}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}} = \frac{5}{8}$$

[illegible]

<u>[illegible] B:</u>

[illegible] A

$$\Psi = \frac{\Psi_0 + \Psi_1}{\|\Psi_0 + \Psi_1\|} \qquad \Psi = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{2}}|2\rangle}{\sqrt{3}}$$

[illegible] a [illegible] B [illegible] qutrit [illegible] $\frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{8}}|2\rangle$

[illegible] a [illegible] 1 [illegible] qutrit [illegible]

$$p_r\left[\text{[illegible]}\ A\right] = \frac{1}{2}\left|\langle \Psi | \Psi_0 \rangle\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\langle \Psi | \Psi_1 \rangle\right|^2 = \cancel{2} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{9}{12}\right] = \frac{3}{4}$$

$$\langle\ \rangle = \frac{2}{\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

5

טענה: לכל A רמאי, $\Pr(\text{זוכה } A) \le \frac{3}{4}$

הוכחה: נוכיח לכל רמאי כזה לA:

- נסמן ב-3: $\Psi \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

ונשלח את ה-qutrit ב-$\mathcal{H}_B$ ל-Bob

- בשלב ב, אליס מודדת a כמו שהיא רוצה

(אם לא רוצה להגיד את a

$a \neq 1$ " " " ")

- מפעילה את U_a על $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$ $\tilde{\Psi}_a = (U_a \otimes I)|\Psi\rangle$

ושולחת את ה-qutrit ב-$\mathcal{H}_A$ ל-B

נניח: b=0, A רוצה לקבל תוצאה 0, (המקרה האחרון דומה)

$$\Pr\left[\begin{matrix} B \text{ מקבל} \\ \text{את } 0 \\ b=0 \text{ כש} \end{matrix}\right] = \langle \Psi_0 | Tr_{\mathcal{H}} (|\tilde{\Psi}_0\rangle\langle\tilde{\Psi}_0|) | \Psi_0 \rangle$$

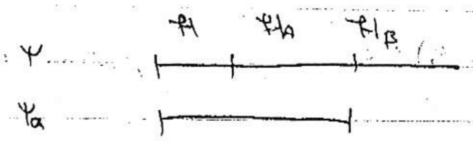
$$\Pr\left[\begin{matrix} B \text{ מקבל} \\ 0 \text{ את} \end{matrix}\right] = \underset{b=0}{\frac{1}{2}} \langle \Psi_0 | \underbrace{Tr_{\mathcal{H}} |\tilde{\Psi}_0\rangle\langle\tilde{\Psi}_0|}_{\sigma_0 \text{ נסמן}} |\Psi_0\rangle + \underset{b=1}{\frac{1}{2}} \langle \Psi_1 | \underbrace{Tr_{\mathcal{H}} |\tilde{\Psi}_1\rangle\langle\tilde{\Psi}_1|}_{\sigma_1 \text{ נסמן}} |\Psi_1\rangle$$

$$= \frac{1}{2} F(\underbrace{|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|}_{\rho_0 \text{ נסמן}}, \sigma_0) + \frac{1}{2} F(\underbrace{|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|}_{\rho_1 \text{ נסמן}}, \sigma_1)$$

$$\le \frac{1}{2} F(Tr_{\mathcal{H}_A} |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|, Tr_{\mathcal{H}_A} \sigma_0) + \frac{1}{2} F(Tr_{\mathcal{H}_A} \rho_1, Tr_{\mathcal{H}_A} \sigma_1)$$

6

$I \otimes u_{a_i}$



שלב

לכל משנה של הפקלק A, B

$$\mathrm{Tr}_{A}\,\sigma_0 = \mathrm{Tr}_{A}\,\sigma_1$$

לכן

$$\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(\rho_0,\sigma) + F(\rho_1,\sigma)\right]$$

$\rho_i = \mathrm{Tr}_{A}\left(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\right)$

$$\le \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{F(\rho_0,\rho_1)}\right]$$

תכד נכונה

$$\sqrt{F(\rho_0,\rho_1)} = \|\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}\|_{tr} = \left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}\right\|_{tr} = \frac{1}{2}\left\|\underbrace{\begin{pmatrix}0 & \\ & 0\end{pmatrix}}\right\|_{tr} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr[0 \text{ wins } B] \le \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$

7

טענה: $F(\rho_0,\sigma)+F(\rho_1,\sigma) \le 1+\sqrt{F(\rho_0,\rho_1)}$ $\quad \forall \rho_0,\rho_1,\sigma$

הוכחה: (ט) מספק להוכיח עבור התפלגויות קלאסיות.

הוכחה

נזכר כי $F(\rho_0,\rho_1)$.

$$F(\rho_0,\rho_1) = \min_{\text{POVM } \mathcal{E}} F(\mathcal{E}(\rho_0), \mathcal{E}(\rho_1))$$

נסמן $P_0 = \mathcal{E}(\rho_0),\ P_1 = \mathcal{E}(\rho_1),\ q = \mathcal{E}(\sigma)$

אז $1+\sqrt{F(\rho_0,\rho_1)} = 1+\sqrt{F(P_0,P_1)}$

$$\ge F(P_0,q)+F(P_1,q)$$

מנכונות למקרה הקלאסי

$$= F(\mathcal{E}(\rho_0),\mathcal{E}(\sigma)) + F(\mathcal{E}(\rho_1),\mathcal{E}(\sigma))$$

$$\ge F(\rho_0,\sigma)+F(\rho_1,\sigma)$$

F מינימום על פני $\mathcal{E}$ POVM

הוכחה למקרה הכללי:

יהיו $q, p^{(1)}, p^{(2)}$ התפלגויות כלשהן

$$1+\sqrt{F(p^{(1)},p^{(2)})} \geq F(p^{(1)},q)+F(p^{(2)},q)$$

$$1+\sum\sqrt{p^{(1)}_i p^{(2)}_i} \overset{?}{\geq} \left(\sum\sqrt{p^{(1)}_i q_i}\right)^2+\left(\sum p^{(2)}_i q_i\right)^2$$

נסמן

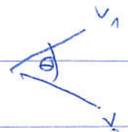
$$v^1=\left(\sqrt{p^{(1)}_1},\ldots,\sqrt{p^{(1)}_n}\right)$$

$$v^2=\left(\sqrt{p^{(2)}_1}\ \ldots\ \sqrt{p^{(2)}_n}\right)$$

$$q=\left(\sqrt{q_1}\ \ldots\ \sqrt{q_n}\right)$$

וקטורים באורך 1.

$$1+\underbrace{\langle v^1,v^2\rangle}_{\cos\theta} \overset{?}{\geq} \underbrace{|\langle v^1,q\rangle|^2}_{\cos^2\alpha}+\underbrace{|\langle v^2,q\rangle|^2}_{\cos^2(\theta-\alpha)}$$

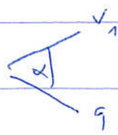


נניח

זה המקרה ש-q באמצע

בין v_1 v_2 והמקרים

המקרים האחרים גרועים יותר.



מקסימום ב- $2\cos\alpha=2\cos(\theta-\alpha)$

$\alpha=\frac{\theta}{2}$

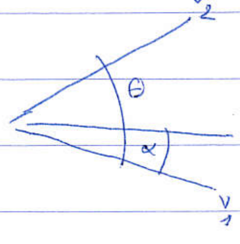
$\cancel{\cos\theta \overset{?}{\geq} \cos^2\alpha+(\cos^2(\theta-\alpha)-1)}$

$\cancel{\cos\theta \overset{?}{\geq} \cos^2\alpha-\sin^2(\theta-\alpha)}$

$\cancel{=\cos(\alpha+\theta-\alpha)=\cos(\theta)}$.

ואז הערך

$1+\cos\theta$



9