מטריצת הצפיפות

המצב הקוונטי הכללי הוא תערובת שבהסתברות p_i נמצא במצב $\varphi_i \in \mathcal{H}$.

נסמן תערובת זו $\{p_i, \varphi_i\}$ מטריצה $\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

נשים לב ש: ρ:

1. הרמיטית $\rho^\dagger = \rho$
2. צרוף קמור של חיובית ולכן חיובית

(לכל v, $v^\dagger \rho v = \sum p_i \underbrace{v^\dagger |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| v}_{\geq 0} \geq 0$)

3. בעלת $Tr(\rho) = \sum p_i \underbrace{Tr(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)}_{\langle\varphi_i|\varphi_i\rangle = 1} = \sum p_i = 1$

- המיפוי הוא many $\rightarrow$ one

למשל I הוא מיפוי של $\{(\frac{1}{2}, |0\rangle), (\frac{1}{2}, |1\rangle)\}$

וגם $\{(\frac{1}{2}, |+\rangle), (\frac{1}{2}, |-\rangle)\}$.

- המיפוי הוא על.

אם $\rho \geq 0$ ובעלת Tr 1,

אז בפירוק לבסיס אורתונורמלי

$\rho = \sum p_i |v_i\rangle\langle v_i|$ עם $\underbrace{0 \leq p_i}_{\text{כי } \rho \geq 0}$, $\underbrace{\sum p_i = 1}_{\text{כי } Tr(\rho) = 1}$

היא מיפוי של $\{(p_i, |v_i\rangle)\}$

U:

אם הינו בתערובת $\{p_i, \varphi_i\}$ $\quad \rho = \sum p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

והפעלנו U, קיבלנו $\{p_i, U\varphi_i\}$

$$\rho' = \sum p_i |U\varphi_i\rangle\langle U\varphi_i|$$

$$= \sum p_i\, U\varphi_i \varphi_i^\dagger U^\dagger = U \sum p_i \varphi_i \varphi_i^\dagger U^\dagger = \boxed{U\rho U^\dagger}$$

אנסילה

אם הינו בתערובת $\{p_i, \varphi_i\}$

והוספנו אנסילה $\bar{o}$, קיבלנו $\{p_i, \varphi_i \otimes |\bar{o}\rangle\}$

$$\rho' = \sum p_i |\varphi_i \otimes |\bar{o}\rangle\rangle \langle \varphi_i \otimes \bar{o}|$$

$$= \sum p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \otimes |\bar{o}\rangle\langle\bar{o}| = \rho \otimes |\bar{o}\rangle\langle\bar{o}|$$

מדידה

אם הינו בתערובת $\{p_i, \varphi_i\}$

וביצענו מדידה M_k,

אזי מקבלים k בהסתברות $\quad q_k = \sum p_i \|M_k \varphi_i\|^2$

$$q_k = \sum p_i\, \varphi_i^\dagger M_k^\dagger M_k \varphi_i = \sum p_i \, Tr(M_k^\dagger M_k \varphi_i \varphi_i^\dagger)$$

$$= Tr(M_k^\dagger M_k \sum p_i \varphi_i \varphi_i^\dagger) = Tr(M_k^\dagger M_k \rho) = Tr(E_k \rho)$$

אם הינו במצב φ, וביצענו מדידה $\{M_k\}$ וקיבלנו k,

נהיה במצב $\dfrac{M_k \varphi}{\|M_k \varphi\|}$

$$\rho' = \frac{M_k \varphi \varphi^\dagger M_k^\dagger}{\|M_k \varphi\|^2} = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{Tr(E_k \rho)}$$

אם היינו מודדים $\{p_i, \psi_i\}$ וקיבלנו תוצאה k

המצב המכוס הוא

$$\sum_i pr(i|k)\,\frac{M_k\psi_i\psi_i^\dagger M_k^\dagger}{\underbrace{\|M_k\psi_i\|^2}_{pr(k|i)}} = \sum_i \frac{pr(\cancel{i},k)}{pr(k)}\cdot\frac{M_k\psi_i\psi_i^\dagger M_k^\dagger}{pr(\cancel{i}k)}\cdot pr(i)$$

$$= \sum_i \frac{p_i\, M_k\psi_i\psi_i^\dagger M_k^\dagger}{pr(k)} = \frac{M_k\rho M_k^\dagger}{pr(k)} = \frac{M_k\rho M_k^\dagger}{Tr(E_k\rho)}$$

הבין כמו בנוסחה: ρ pure-state

מסקנה: לצורות שהמיפוי {התמרות} $\rightarrow$ d.m.

הוא

many $\Rightarrow$ one

הוא לא מכיל מידע על כל האופנים שניתן לבנות מצב קוונטי

הוא תאור ממצה

$\boxed{\text{לא ניתן להבחין בין 2 תערובות שונות, להן אותו d.m.}}$

ההפך (גם לגבי כמה זה) ניתן להבחין בין 2 תערובות

להן d.m שונה.

The trace norm (הכללה לנורמה 1).

יהי A אופרטור לינארי

אז $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$

הסבר: אם $AA^\dagger \geq 0$, לכן יש בסיס ע"ע שבו $AA^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

ולכן $|A| = \sqrt{A^\dagger A} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

תכונה $|A| \geq 0$

[יהי A ~~[illegible]~~ הרמיטי עם ע"ע v וע"ע λ

אז v הוא ע"ע של $|A|$ עם $|\lambda|$: $v^\dagger A^\dagger A v = \cancel{} \lambda^2 v$, $|A|v = |\lambda| \cdot v$]

הגדרה $\|A\|_{tr} = Tr(|A|)$

טענה $\|\ \|_{tr}$ נורמה

$\|A+B\|_{tr} \leq \|A\|_{tr} + \|B\|_{tr}$

$\|A \cdot B\|_{tr} \leq \|A\| \cdot \|B\|_{tr}$

$\|A \cdot B\|_{tr} \leq \|A\|_{tr} \cdot \|B\|$

$\|A \otimes B\|_{tr} = \|A\|_{tr} \cdot \|B\|_{tr}$

$\forall_{\text{unitary } U}\ \|AU\|_{tr} = \|A\|_{tr}$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

טענה לכל X $\|X\|_{tr} = \max_U Tr(UX)$

מסקנה לכל X $\|X\|_{tr} \geq Tr(X)$

מה טוב אפשר להבחין בין 2 תערובות

נניח ש ρ הוא בהסת' שווה או תערובת ρ_0
בסבירות חצי, או תערובת ρ_1 בסבירות חצי.

אנו רוצים לבנות טסט הכי טוב שאפשר שיבחין בין
2 המקרים.

(אם $\rho_0=\rho_1$ אז ניחוש כמו קודם).

<u>טענה 1</u>: יש טסט T שמבחין

$$\Pr[T \text{ צודק}] \le \frac{1}{2} + \frac{\|\rho_0-\rho_1\|_{tr}}{4}$$

בחירה ρ_0,ρ_1 באקראי ומקרא של T

<u>הוכחה</u>: נניח מנגנון POVM עם 2 תוצאות אפשריות

$$Q_0+Q_1=I, \quad Q_0, Q_1 \ge 0$$

ב-Q_0 אנו אומרים "זה ρ_0"
וב-Q_1 " " " "ρ_1".

$$\Pr[\text{צודקים}] = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{הסתברות לבחירת } \rho_0} Tr(Q_0\rho_0) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{בחירת } \rho_1} Tr(Q_1\rho_1)$$

$$\Pr[\text{טועים}] = \frac{1}{2} Tr(Q_0\rho_1) + \frac{1}{2} Tr(Q_1\rho_0)$$

$$\Pr[\text{צודקים}] - \Pr[\text{טועים}] = \frac{1}{2} Tr(Q_0(\rho_0-\rho_1)) + \frac{1}{2} Tr(Q_1(\rho_1-\rho_0))$$

$$= \frac{1}{2} Tr((Q_0-Q_1)(\rho_0-\rho_1))$$

$$\le \frac{1}{2}\,\|(Q_0-Q_1)\,(\rho_0-\rho_1)\|_{tr}$$

$$\le \frac{1}{2}\,\underbrace{\|Q_0-Q_1\|}_{\le 1}\cdot\|\rho_0-\rho_1\|_{tr}$$

$$* \; v^{\dagger}(Q_0-Q_1)\,v = v^{\dagger}Q_0 v - \underbrace{v^{\dagger}Q_1 v}_{\ge 0} \quad \Rightarrow$$

$$\le v^{\dagger}Q_0 v \le \lambda_i(Q_0) \le 1$$

וכן עבור $v^{\dagger}(Q_1-Q_0)v$.

לכן: יש כלל T עבורו $\Pr[\text{צדק } T] = \frac{1}{2} + \frac{\|\rho_0-\rho_1\|_{tr}}{4}$

<u>הוכחה</u>: נלכסן $\rho_0-\rho_1$ (הרמ') -

יהי $\{v_i\}$ בסיס או"נ של $\rho_0-\rho_1$, v_i ו"ע עם ע"ע μ_i

נעשה את המדידה $\Pi_0 = \sum_{i:\mu_i\ge 0} |v_i\rangle\langle v_i|$

$$\Pi_1 = \sum_{i:\mu_i<0} |v_i\rangle\langle v_i|$$

$$\Pi_0+\Pi_1 = I\ ,\quad \Pi_0,\Pi_1 \ge 0$$

$$\Pr(\text{צדק } T) - \Pr(\text{טועה } T) = \frac{1}{2}\,\underbrace{Tr((\Pi_0-\Pi_1)\,(\rho_0-\rho_1))} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}|\mu_i| = \frac{1}{2}Tr(\rho_0-\rho_1) = \frac{1}{2}\|\rho_0-\rho_1\|_{tr}$$

בבסיס v_i הם

$$\begin{array}{l} \mu_i\ge 0 \\ \mu_i<0 \end{array}\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right)}_{\Pi_0-\Pi_1}\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_k & & & \\ \hline & & & \mu_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \end{array}\right)}_{\rho_0-\rho_1}$$

ע"ע

The reduced dm operator

נגדיר עבור $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_A$
$w_1, w_2 \in \mathcal{H}_B$

$$Tr_B\left(|v_1\rangle\langle v_2| \otimes |w_1\rangle\langle w_2|\right) = \underbrace{\langle w_1|w_2\rangle}_{Tr(|w_2\rangle\langle w_1|)} \cdot |v_1\rangle\langle v_2|$$

ונרחיב לינארית.

(ס) מעבר הלאה.

תרגיל: נניח ρ dm מעורב על $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
(אפשר גם כזה שאינו מצב entangled.)

- $$Tr_B\,(U\otimes I)\,\rho\,(U\otimes I)^\dagger = U\,Tr_B\,\rho\,U^\dagger$$

- כל מדידה מקומית על A,

- מדידה $M\otimes I$ על $A\otimes B$
ואז Tr_B

שקול ל Tr_B ואז מדידה M.

- כל טרנספורמציה יוניטרית על B
או מדידה " " "
לא משנה את מה שה-dm - בשוקעים Tr_B

מסקנה: אם מה שעושים ב B הוא מבצעים רק פעולות יוניטריות
ה dm קובע את הסטטיסטיקות של A

מסקנה: B לא יכול להשפיע על הסטטיסטיקות של A
ע"י פעולות מקומיות שלו. — Non-Signalling

מצב שבו התוצאות יכולות להיות Correlated

לדוגמא $EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle + |11\rangle\right]$

נניח A,B מודדים בבסיס הסטנדרטי.

A: רואה 0 בהסת' $\frac{1}{2}$, 1 בהסת' $\frac{1}{2}$
ושום דבר לא תלוי במה ש B יעשה לפני שקרה כאן.

מצב שבו התוצאות קשורות:
אם A רואה 0 גם B רואה 0.
" " " 1 " 1.

בפרט: ~~B~~ אין ל B שום דרך לדעת את התוצאה של A
הוא צריך לשלוח לו תוצאה - כמו
כי אי אפשר להעביר אינפורמציה יותר מהר ממהירות האור

אז המערכת היא non signalling את זה אפשר.

non signaling	✓	
local	?	רק אחד מהם
realism	?	

רק לקוונטים מפתיע!

safe storage principle - במקום לאבד מידע, אפשר להזיז אותו ולשמור אותו מבודד מהמערכת, וזה שקול לגמרי.

שאלה פתוחה: האם בQM יש מדידות, או זו רק אשליה שקיימת כי אנו יכולים לשמור את התוצאות "בצורה" בזמן מבודד משאר המערכת.