משפט צירלסון Tsirelson's bound

לכל מ"ט הרמיטיות A_0, A_1, B_0, B_1 עם ע"ע $1,-1$

לכל מצב ψ מנורמה 1

$$|\langle\psi| A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1 |\psi\rangle| \le 2\sqrt{2}$$

הערה: זה נכון גם כשממדי A_i, B_i, ψ יותר מ 2, $\mathbb{C}^2$

כלומר כשהם נעשה חזק יותר מ 2 qubits.

לפני שנוכיח את המשפט, נגדיר נורמה של אופרטור

מושג שנצטרך הרבה גם בהמשך

נורמה של וקטור - נורמה אוקלידית $v=(v_1,\dots,v_k)$ $\|v\| = \sqrt{\sum v_i^2}$

נורמה של אופרטור A $\qquad \|A\| = \max_v \frac{\|Av\|}{\|v\|}$

דוגמה למחשבה: אם $A=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$, שני ההגדרות מתלכדות.

טענה: אם A הרמיטית אז $\|A\| = \max_i |\lambda_i(A)| \stackrel{?}{=} \lambda_1(A)$

טענה:
$\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$
$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
$\|A\otimes B\| = \|A\|\cdot\|B\|$

נוכיח רק את $A\otimes B$.

~~הערה: אם A הרמיטית אז $\lambda_1(A) \le 1$ ($\|A\| \le 1$)~~

קושי שוורץ?
$|\langle v|w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$
$|\sum v_i w_i| \quad \sqrt{\sum|v_i|^2}\sqrt{\sum|w_i|^2}$

$$\langle \psi | A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 | \psi \rangle$$

קושי שוורץ $\leq \| A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 |\psi\rangle \|$

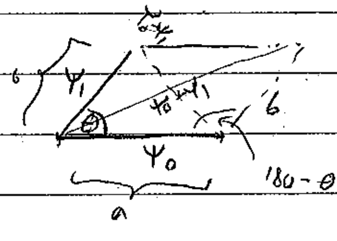
$\|\cdot\|$ נורמה $\leq \| A_0 \otimes (B_0 + B_1) \psi \| + \| A_1 \otimes (B_0 - B_1) \psi \|$

סגור / מ"ג $\leq \| I \otimes (B_0 + B_1) \psi \| + \| I \otimes (B_0 - B_1) \psi \|$

$= \| \psi_0 + \psi_1 \| + \| \psi_0 - \psi_1 \|$

$\psi_1 = (I \otimes B_1)\psi \quad , \psi_0 = (I \otimes B_0)\psi$

$\|\psi_1\| \leq 1$ וכן $\|\psi_0\| \leq \| I \otimes B_0 \psi \| \leq \| I \otimes B_0 \| \cdot \|\psi\| \leq \| I \| \cdot \| B_0 \| \leq 1$



$\underbrace{\| \psi_0 + \psi_1 \|}+ \underbrace{\| \psi_0 - \psi_1 \|} =$ (משפט הקוסינוסים)

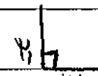
$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180 - \theta)} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$|a| = |b| = 1$ $\leq \sqrt{2 + 2\cos\theta} + \sqrt{2 - 2\cos\theta}$ $\qquad \dfrac{|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|}{\|\psi_1\| \cdot \|\psi_0\|} = \cos\theta$ כאשר

$\leq 2\sqrt{2}$

max calculus $\cos\theta = 0$



$\psi_0 \perp \psi_1$

2

פיתוח של השוויון המקורי:

$$\| A \otimes B \psi \| = \sqrt{\psi^{+} (A \otimes B)^{+} A \otimes B \psi}$$

$$= \sqrt{\psi^{+} A^{+}A \otimes B^{+}B \ \psi}$$

$$\downarrow$$

המקרה שלנו

$A^{+}A = I$ $$= \sqrt{\psi^{+} I \otimes B^{+}B \ \psi}$$

($A^{+}A \leq I$ אם לא כך)

$$= \| I \otimes B \psi \|$$

מדידות

הגדרה: יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט

$M_k: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ אופרטורים ($M_k^\dagger M_k: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ לכן)

כך ש $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$

לאוסף $M=\{M_k\}_k$ כזה נקרא מדידה על $\mathcal{H}$

בהינתן מצב $\psi\in\mathcal{H}$,

מקבלים תוצאה k בהסתברות $p_k=\|M_k\psi\|^2$

ובהינתן תוצאה k נקבל מצב $\frac{M_k\psi}{\|M_k\psi\|}\in\mathcal{H}'$

משפט: כל מדידה כללית ניתנת להשגה ע"י הקרנה אורתוגונלית

ז"א: כל מדידה M ניתנת למימוש ע"י הוספת מצב ... מדידת הקרנה על $U(\psi\otimes|0\rangle)$, כאשר U אוניטרי.

הוכחה:

תקינות: ברור $0\le p_k\le 1$, $\sum_k p_k = \sum_k \psi^\dagger M_k^\dagger M_k\psi = \psi^\dagger \sum_k M_k^\dagger M_k\psi$

$= \psi^\dagger\psi = \langle\psi,\psi\rangle = \|\psi\|^2 = 1$

(ב) מה יש לנו מדידת הקרנה על מרחבים אורתוגונליים V_k ש... $\mathcal{H}$

נסמן M_k הקרנה על V_k

אז $M_k^\dagger = M_k$ $\quad M_k^\dagger M_k = M_k$

$M_\ell M_k = 0$

$\sum_k M_k^\dagger M_k = I$

$\Pr(k \text{ תוצאה}) = \|M_k\psi\|^2$

ובהינתן תוצאה k נקבל $M_k\psi$ מנורמל.

(א) עכשיו נראה מה קורה עם k

נגדיר $T: \mathcal{H}\otimes W \to \mathcal{H}'\otimes W$

ע"י

$$T(\varphi \otimes |0\rangle) = \sum_k M_k(\varphi) \otimes |k\rangle$$

נוכיח שזה (מה נכונה שפשוט).

i. T לינארי

$$T((\varphi_1+\varphi_2)\otimes|0\rangle) = \sum_k M_k(\varphi_1+\varphi_2)\otimes|k\rangle$$

$$=\sum_k (M_k(\varphi_1) + M_k(\varphi_2))\otimes k$$

$$= \sum_k M_k(\varphi_1)\otimes k + \sum_k M_k(\varphi_2)\otimes|k\rangle = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$$

ii. T אוניטרי: יהיו $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$

$$\langle T(\varphi_1\otimes|0\rangle), T(\varphi_2\otimes|0\rangle)\rangle$$

$$= \left(\sum_k M_k(\varphi_1)\otimes|k\rangle\right)^\dagger \sum_l M_l(\varphi_2)\otimes|l\rangle$$

$$= \sum_{k,l} \left((M_k(\varphi_1))^\dagger \otimes |k\rangle^\dagger\right)\cdot\left(M_l(\varphi_2)\otimes|l\rangle\right)$$

$$= \sum_{k,l} \varphi_1^\dagger M_k^\dagger M_l \varphi_2 \cdot \underbrace{\langle k|l\rangle}_{\delta_{k,l}}$$

$$= \sum_k \varphi_1^\dagger M_k^\dagger M_k \varphi_2 = \varphi_1^\dagger \sum_k M_k^\dagger M_k \varphi_2 = \varphi_1^\dagger\varphi_2 = \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$$

לכן T אכן הרחבה אוניטרית.

(ב) אם נמדוד נמדוד את W בבסיס הסטנדרטי

נקבל תוצאה k בהסת' $\|M_k\varphi\|^2$

ואז נקבל את $M_k\varphi\otimes|k\rangle$ מנורמל.

(ג)

הערה: כל חשוב: 1. הוספת אנסילה 2. [illegible] 3. מדידה [illegible] } ניתן להציג כמדידה ע"י $\{M_k\}_k$ ב-$\mathcal{H}$.

$M_k = \Pi_k U$

אם אנו מתעניינים רק בהסתברות לקבלת k כתוצאה
(ולא במצב שאחרי המדידה) אז:

$$p_k = \| M_k \varphi \|^2 = \varphi^\dagger M_k^\dagger M_k \varphi = \varphi^\dagger (M_k^\dagger M_k) \varphi$$

1. $E_k = M_k^\dagger M_k$ חיובי $E_k \geq 0$

$$\sum_k E_k = I$$

[הגדרה: נאמר ש-A הוא חיובי אם הוא הרמיטי
וקיימת אחת מהתכונות השקולות הבאות:

1. כל הע"ע שלה חיוביים (הרמיטית ממשיים כי הם ממשיים)
2. לכל v $v^\dagger A v \geq 0$
3. $A = B^\dagger B$ עבור איזשהו B.]

וגם להפך: אם יש לנו אוסף $\{E_k\}_k$
כך שלכל k $E_k \geq 0$
ו- $\sum_k E_k = I$

אז יש M_k כך ש- $E_k = M_k^\dagger M_k$, $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$
(ההסתברות לקבלת k על φ היא $\varphi^\dagger E_k \varphi$).

הגדרה: אוסף $\{E_k\}_k$ של מ"ה כך ש:
1. $E_k \geq 0$
2. $\sum_k E_k = I$ נקרא POVM

לכל מדידה $\{M_k\}_k$ כך ש- $E_k = M_k^\dagger M_k$
1. $p_k = \Pr(k \text{ תוצאה על } \varphi) = \varphi^\dagger E_k \varphi$

[נשים לב ש- $p_k \geq 0$ לפי (1), ו- $\sum_k p_k = \varphi^\dagger \sum E_k \varphi = \varphi^\dagger \varphi = 1$.]

בעיות למבחן של אורתוגונליות:-

בעיה 1 (בן אורתוגונלי):

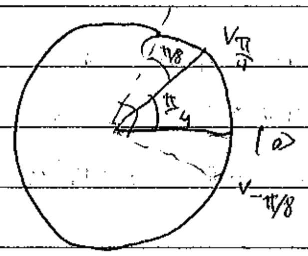
נתון Ψ, ידוע או ש $\Psi=|0\rangle$ או $\Psi=|+\rangle$

מטרתנו להבחין בין 2 המקרים.

אם ענינו נכון נקבל 1$.

אם " טעינו נפסיד 1$.

אסטרטגיה 1:



נמדוד ב- $\left\{V_{\frac{\pi}{8}}, V_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\right\}$ ונענה בהתאם.

אם יצא 0 נענה $\Psi=|0\rangle$
" " 1 " $\Psi=|+\rangle$

$$pr(\text{נצדק}) = \cos^2\frac{\pi}{8} \approx 0.86$$

$$pr(\text{נטעה}) = \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$E(\text{רווח}) = \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \boxed{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

בהמשך הקורס נראה שזו האסטרטגיה הטובה ביותר. (הוכחה?)

$$\rho = |0\rangle\langle 0| - |+\rangle\langle +| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1+\lambda_2=0$, $\quad \lambda^2 = \lambda_1\cdot\lambda_2 = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$ $\quad \lambda^2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{1}{2}\sum|\lambda_i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

__בעיה 2__: אם אנחנו בודקים מרחבית אז
אנחנו צריכים מספר ∞.

הבעיה ״קונה של אלבר״.

__בעיה 2__ נניח יש לנו - כן, כדי, לא יודע
כשאנחנו כן, כדי - גלא בודקים.
לומר בהסתברות הסתברותי
כשאנחנו רואים. כן נותן כדי
״ ״ כן ״ לא יודע״

$pr(\text{רואים} \mid \psi=0) = 0$

$pr(\text{רואים} \mid \psi=+) = \frac{1}{2}$

__בעיה 3__!

הטלה 1 כדי. אם זה קורה בהכרח כדי $\quad E_0=\alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \alpha\cdot|1\rangle\langle 1|$

הטלה 1 כדי. ״ ״ ״ ״ כן $\quad E_- = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \alpha\cdot|-\rangle\langle -|$

$$E_{quit} = I - E_0 - E_-$$

צריך $E_{quit} \geq 0$

$$E_{quit} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&\alpha\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha/2&-\alpha/2\\-\alpha/2&\alpha/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{\alpha}{2}&\alpha/2\\\alpha/2&1-\frac{3\alpha}{2}\end{pmatrix}$$

__הערה__: הטלה α רק שלא משנה את הקלט בהם ≤ 0.29 נותן נכון
ובשאר נותן ״לא יודע״

מטריצת הצפיפות

המצב הקוונטי הכללי הוא תערובת שבהסתברות p_i נמצא במצב $\psi_i \in \mathcal{H}$.

נסמן תערובת $\{p_i, \psi_i\}$ קורלציה $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

נשים לב ש: ρ:

1. הרמיטית $\rho^\dagger = \rho$
2. צירוף קמור של חיוביות הוא חיובי

(לכל v, $v^\dagger \rho v = \sum p_i \underbrace{v^\dagger |\psi_i\rangle\langle\psi_i| v}_{\geq 0} \geq 0$)

3. עקבה 1 $Tr(\rho) = \sum p_i \underbrace{Tr(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)}_{=\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1} = \sum p_i = 1$

- המיפוי הוא many $\to$ one

למשל I הוא מיפוי של $\{(\frac{1}{2}, |0\rangle), (\frac{1}{2}, |1\rangle)\}$

וגם $\{(\frac{1}{2}, |+\rangle), (\frac{1}{2}, |-\rangle)\}$.

- המיפוי הוא על.

אם $\rho \geq 0$ ועקבה Tr 1,

אז בהכרח לכסינה עם ע"ע אי-שליליים

$\rho = \sum p_i |v_i\rangle\langle v_i|$ עם $\underbrace{0 \leq p_i}_{\text{כי } \rho \geq 0}$, $\underbrace{\sum p_i = 1}_{\text{כי } Tr(\rho) = 1}$

הם מיפוי של $\{(p_i, |v_i\rangle)\}$.

U:

אם הינו בתערובת $\{p_i, \psi_i\}$ $\quad \rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

ועברנו U, עברנו $\{p_i, U\psi_i\}$

$$\rho' = \sum p_i |U\psi_i\rangle\langle U\psi_i|$$

$$= \sum p_i U\psi_i \psi_i^{\dagger} U^{\dagger} = U \sum p_i \psi_i \psi_i^{\dagger} U^{\dagger} = \boxed{U \rho U^{\dagger}}$$

אנסילה:

אם הינו בתערובת $\{p_i, \psi_i\}$

והוספנו אנסילה σ, עברנו $\{p_i, \psi_i \otimes |\sigma\rangle\}$

$$\rho' = \sum p_i |\psi_i \otimes |\sigma\rangle\rangle\langle\psi_i \otimes \sigma|$$

$$= \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma| = \rho \otimes |\sigma\rangle\langle\sigma|$$

מדידה:

אם הינו בתערובת $\{p_i, \psi_i\}$

וביצענו מדידה M_k,

אזי נקבל k בהסתברות $\quad q_k = \sum p_i \|M_k \psi_i\|^2$

$$q_k = \sum p_i \psi_i^{\dagger} M_k^{\dagger} M_k \psi_i = \sum p_i \operatorname{Tr}(M_k^{\dagger} M_k \psi_i \psi_i^{\dagger})$$

$$= \operatorname{Tr}(M_k^{\dagger} M_k \sum p_i \psi_i \psi_i^{\dagger}) = \operatorname{Tr}(M_k^{\dagger} M_k \rho) = \operatorname{Tr}(E_k \rho)$$

אם הינו במצב ψ, וביצענו מדידה $\{M_k\}$ וקיבלנו k,

נקבל מצב $\frac{M_k \psi}{\|M_k \psi\|}$

$$\rho' = \frac{M_k \psi \psi^{\dagger} M_k^{\dagger}}{\|M_k \psi\|^2} = \frac{M_k \rho M_k^{\dagger}}{\operatorname{Tr}(E_k \rho)}$$

ו/אם היינו משערים $\{p_i, \psi_i\}$ וקבלנו תוצאה k

המצב הנכון הוא

$$\sum_i pr(i|k)\, \frac{M_k \varphi_i \varphi_i^\dagger M_k^\dagger}{\underbrace{\| M_k \varphi_i \|^2}_{pr(k|i)}} = \sum_i \frac{pr(i,k)}{pr(k)} \cdot \frac{M_k \varphi_i \varphi_i^\dagger M_k^\dagger}{pr(i/k)} \cdot pr(i)$$

$$= \sum_i p_i \frac{M_k \varphi_i \varphi_i^\dagger M_k^\dagger}{pr(k)} = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{pr(k)} = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{Tr(E_k \rho)}$$

הכל כמו בנוסחה ρ pure-state

מסקנה: למערכת שקולים $\{\text{תערובות}\} \rightarrow d.m$ הם

many → one

הם לא מגיע מעגל של כל הנתונים שניתן לקבל בתחילה קונסי׳

הם לא תאור ממצה

לא ניתן להבחין בין 2 תערובות שונות, להן אותו d.m.

המשך (כלומר לא כמו כאן) ניתן להבחין בין 2 תערובות להן d.m שונה.