Super dense coding — entanglement

תהי $\varphi \in H_A \otimes H_B$ נאמר שהוא לא entangled אם $\varphi = v \otimes w$

עבור $v \in H_A$, $w \in H_B$. אחרת, הוא entangled.

אפשר לומר "כמה" הוא "entangled" אבל לא נעסוק בזה כרגע.

דוגמא $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ הוא לא מפרק

הוכחה: נניח $v = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

$w = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$

$$v \otimes w = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$$

ולכן אם $\varphi = v \otimes w$

אז $\alpha\gamma = \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (1)

$\alpha\delta = \beta\gamma = 0$

ולכן $\alpha \neq 0$ אז $\delta = 0$ סתירה ל-(1).

$\frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle]$ נקרא EPR-pair על שם איינשטיין-פודולסקי-רוזן

1

Super dense coding

נניח A,B חולקים מצב $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$

A מעוניינת לשלוח שני ביטים קלסיים $x_1,x_2 \in \{0,1\}$

ורוצה לשדר אותם לבוב.

נראה ש A יכולה לעשות זאת ע"י קיוביט אחד

$$\boxed{EPR + 1\,qubit = 2\,bits}$$

לא תלוי ב $x: x_1 x_2$

הפרוטוקול:

המצב

אם $x=00$, A לא עושה כלום I $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$

$x=01$ A מפעילה Z על ה qubit שלה $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle-|11\rangle]$

$x=10$ A מפעילה $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}[|10\rangle+|01\rangle]$

$x=11$ $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}[-|10\rangle+|01\rangle]$

ה 4 הוקטורים המתקבלים ניצבים זה לזה

ולכן B יכול למדוד, ולגלות מה $x=x_1x_2$.

Teleportation

A, B מחזיקים EPR $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle + |11\rangle\right]$

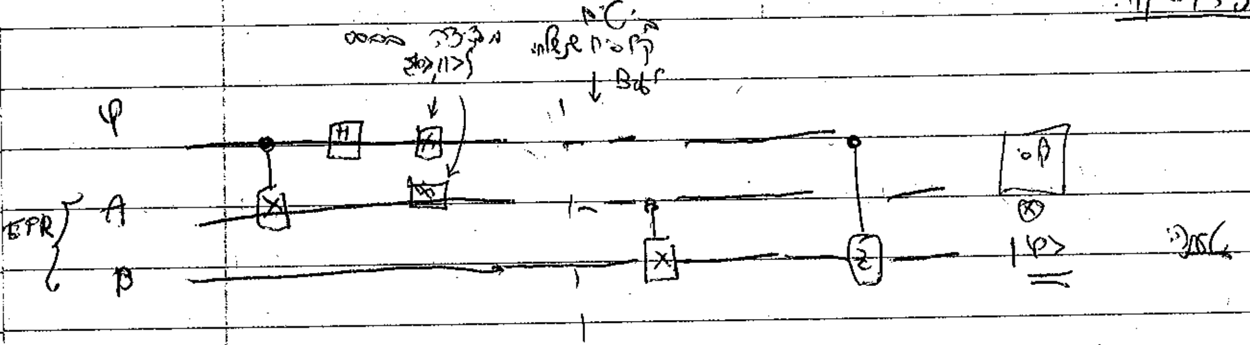
A מחזיקה מצב קוונטי $\varphi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

הוא רוצה להעביר אותו ל Bob (להעביר אותו אליו)

כך: כלים להשתמש בו:

1. זוג EPR
2. תקשורת קלאסית (מעביר 2 ביטים) ב תקשורת קוונטית

<u>הפרוטוקול:</u>



$Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

בהתחלה:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle + |11\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\left[|000\rangle + |011\rangle\right] + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left[|100\rangle + |111\rangle\right]$$

אחרי

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left[|000\rangle + |011\rangle\right] + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left[|110\rangle + |101\rangle\right]$$

אחרי H

$$\frac{\alpha}{2}\left[|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle\right]$$

$$+ \frac{\beta}{2}\left[|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle\right]$$

2 מדידות

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ ש ψ נכון: $\quad 0$
0

$\frac{\alpha}{2}|1\rangle \quad \frac{\beta}{2}|0\rangle$ $\quad 0$
1

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ ש ψ $\quad X$ אחרי

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle - \frac{\beta}{2}|1\rangle$ $\quad 1$
0

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ ש ψ $\quad Z$ אחרי

$\frac{\alpha}{2}|1\rangle - \frac{\beta}{2}|0\rangle$ $\quad 1$
1

$\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \frac{\beta}{2}|1\rangle$ $\quad ZX$ אחרי

Clauser, Horne, Shimony, Holt 69 — CHSH game inequality

המשחק:

שני שחקנים A,B
referee

ה Referee בוחר שאלה $r\in\{0,1\}$ ושולח ל A
ושאלה $s\in\{0,1\}$ " " B

A המקבל שאלה r עונה תשובה $a(r)=a_r\in\{0,1\}$
B המקבל " s " " $b(s)=b_s\in\{0,1\}$

A,B מנצחים במשחק אם $r\cdot s = a\oplus b$

מה אסטרטגיית המשחק הכי טובה ל A,B
ומה הסתברות הנצחון הטובה ביותר במשחק?

(א) A,B מנצחים דטרמיניסטית:
A על שאלה r עונה תשובה מוגדרת $a(r)$ כך
גם ל B.

צריך:

$$a_0 \oplus b_0 = 0$$
$$a_0 \oplus b_1 = 0$$
$$a_1 \oplus b_0 = 0$$
$$a_1 \oplus b_1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad 0\oplus 0 = 0\oplus 1$$
$$0 = 1$$

אבל

ולכן לכל היותר 3 שוויונות מתקיימים יכולים להתקיים
ולכן $\Pr_{r,s}($שניהם מנצחים$)\le \frac{3}{4}$

ומצב שני יש כזו 'אלג' לאבד $a_0=a_1=b_0=b_1=0$

(ב) A,B הסתברותיים

$$a_0=\begin{cases}0 & p_0 \text{ בהסתברות} \\ 1 & 1-p_0\end{cases} \qquad b_0=\begin{cases}0 & q_0 \\ 1 & 1-q_0\end{cases}$$

$$a_1=\begin{cases}0 & p_1 \\ 1 & 1-p_1\end{cases} \qquad b_1=\begin{cases}0 & q_1 \\ 1 & 1-q_1\end{cases}$$

B אלג' הסתברותי הוא צירוף קמור של אלג' דטרמיניסטיים

לכן $\Pr_{s,r}[A,B \text{ מנצחים}] \le \frac{3}{4}$

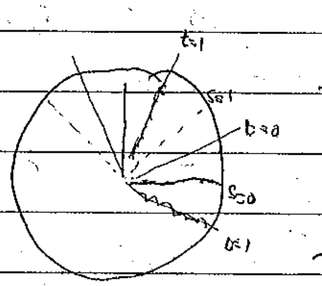
ומטבעות A,B

$\downarrow$ max של דטרמיניסטיים

(ג) A,B קוונטיים:

A,B חולקים EPR-pair

$$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right]$$



A: אם קיבלה $s=0$ מודדת בבסיס $B_0=\{|0\rangle,|1\rangle\}$
$=\{v_0, v_{\frac{\pi}{2}}\}$

אם קיבלה $s=1$ מודדת בבסיס $B_{\frac{\pi}{4}}=\{|+\rangle,|-\rangle\}$
$=\{v_{\frac{\pi}{4}}, v_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}\}$

B: אם קיבל $t=0$ מודד בבסיס $B_{\frac{\pi}{8}}=\{v_{\frac{\pi}{8}}, v_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\}$

$\{v_{-\frac{\pi}{8}}, v_{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}}\} = B_{-\frac{\pi}{4}}$

מה ההסתברות להצלחה?

~~[illegible]~~ אסטרטגיה.

א. תיאור מקוצר של האלגוריתם.

אם $s=0$ A מודד על המקום שלו בזווית 0.
$s=1$ " " " " " $-\frac{\pi}{4}$

אם $t=0$ B מודד " " שלו " " $-\frac{\pi}{8}$
$t=1$ B " " " $\frac{\pi}{8}$

A,B מודדים בבסיס המתאימים ומקבלים x (A) ו-y (B)
אם $x \oplus y = s \cdot t$ הם מנצחים.

ד. נניח $s \cdot t = 0$

המצב אחרי המדידה

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_0 \otimes V_{-\frac{\pi}{8}} + V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$V_\alpha = \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle$$

מנצחים אם

$$W_{win} = \mathrm{span}\left\{V_0 \otimes V_0,\ V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$\Pr[\text{ניצחון}] = \|\underbrace{\Pi_{win}}_{\text{הטלה על } W_{win}} v\|^2 = \frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}}{2} = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$\Pi_{win} v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Pi_{win} V_0 \otimes V_{-\frac{\pi}{8}} + \Pi_{win} V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underbrace{\Pi_0}_{\text{הטלה על } V_0 \otimes V_0} V_0 \otimes V_{-\frac{\pi}{8}} + \underbrace{\Pi_{\pi/2}}_{\text{הטלה על } V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}}} V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\right]$$

כי $V_0 \perp V_{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{\pi}{8}|0,0\rangle + \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|1,1\rangle\right]$$

$$\Pi_0 V_0 \otimes V_{-\frac{\pi}{8}} = \Pi_0\left[\left(\underbrace{\cos(0)}_{1}|0\rangle + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}|1\rangle\right) \otimes \left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)|0\rangle + \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)|1\rangle\right)\right]$$

$$= \Pi_0\left[|0\rangle \otimes \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|0\rangle - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)|1\rangle\right)\right]$$

$$= |0\rangle \otimes \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)|0\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(|0\rangle \otimes |0\rangle\right)$$

[illegible]

[illegible] (אב)

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_0 \otimes V_{-\frac{\pi}{8}} + V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_0 \otimes V_0 + V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}}\right]$$ [illegible] $\frac{\pi}{8}$ [illegible]

$$\langle v, EPR\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle V_0 \otimes V_{-\frac{\pi}{8}}, V_0 \otimes V_0\rangle}_{\underbrace{\langle V_0, V_0\rangle}_{1}\cdot\underbrace{\langle V_{-\frac{\pi}{8}}, V_0\rangle}_{\cos(\frac{\pi}{8})}} + \frac{1}{2}\langle V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}, V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}}\rangle$$

$$\downarrow$$

$$V_0 \perp V_1 \qquad \underbrace{\langle V_{\frac{\pi}{2}}, V_{\frac{\pi}{2}}\rangle}_{1}\cdot\underbrace{\langle V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}, V_{\frac{\pi}{2}}\rangle}_{\cos(\frac{\pi}{8})}$$

$$\|\Pi_{win} v\|^2 \geq |\langle v, v\rangle|^2 = \cos^2\frac{\pi}{8}$$ [illegible] $v \in W_{win}$

[illegible] $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_0 \otimes V_{\frac{\pi}{8}} + V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}}\right]$ [illegible] (אב)

$$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_0 \otimes V_0 + V_{\frac{\pi}{2}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}}\right]$$ אותו [illegible] (ה)

$$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_\alpha \otimes V_\alpha + V_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \otimes V_{\frac{\pi}{2}+\alpha}\right]$$ ולכן! לכל α

הוכחה

$$\sqrt{2}E = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_\alpha \otimes V_\alpha + V_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \otimes V_{\frac{\pi}{2}+\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos(\alpha)|0\rangle + \sin(\alpha)|1\rangle\right) \otimes \left(\cos(\alpha)|0\rangle + \sin(\alpha)|1\rangle\right) + \left(\cos(\tfrac{\pi}{2}+\alpha)|0\rangle + \sin(\tfrac{\pi}{2}+\alpha)|1\rangle\right) \otimes (\quad)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \cos^2(\alpha)|0,0\rangle + \cos(\alpha)\sin(\alpha)|0,1\rangle + \cos(\alpha)\sin(\alpha)|1,0\rangle + \sin^2(\alpha)|1,1\rangle$$

$$+ \underbrace{\cos^2(\tfrac{\pi}{2}+\alpha)}_{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin(\alpha)}|0,0\rangle + \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\tfrac{\pi}{2}+\alpha)}_{-\sin(\alpha)\cos(\alpha)}|0,1\rangle + \quad + |1,1\rangle + \underbrace{\sin^2(\tfrac{\pi}{2}+\alpha)}_{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos(\alpha)}|1,1\rangle$$

$$= \left(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right)|0,0\rangle + \left(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right)|1,1\rangle$$

$$= |0,0\rangle + |1,1\rangle$$

∎

$s=0,\ t=0$ המצב של כן מוצגים כאן

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_{-\frac{\pi}{4}} \otimes V_{\frac{\pi}{8}} + V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_{-\frac{\pi}{4}} \otimes V_{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}} + V_{\frac{\pi}{4}} \otimes V_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$EPR = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_{-\frac{\pi}{4}} \otimes V_{-\frac{\pi}{4}} + V_{\frac{\pi}{4}} \otimes V_{\frac{\pi}{4}}\right]$$

הטיעון כמו קודם.

(c) $s=1,\ t=1$

המצב של אלו מוצגים כאן

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_{-\frac{\pi}{4}} \otimes V_{\frac{\pi}{8}} + V_{+\frac{\pi}{4}} \otimes V_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_{-\frac{\pi}{4}} \otimes V_{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}} + V_{+\frac{\pi}{4}} \otimes V_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\right]$$

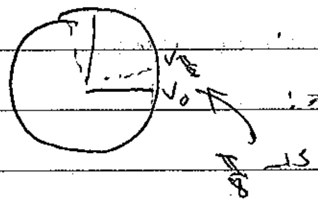
ולכן הוא הולך ב $\frac{\pi}{8}$ מ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|01\rangle+|10\rangle\right]$

ולכן ההסת' $\cos^2\frac{\pi}{8}$ לקבל x,y כך ש $x\oplus y=1$.

<u>הוכחה:</u>

$t=0$, $s=0$ מקרה:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_0\otimes V_{\frac{\pi}{8}}+V_{\frac{\pi}{2}}\otimes V_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}}\right]$$

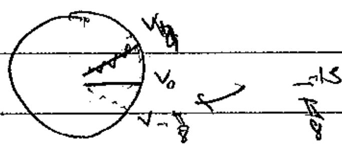


הוא $\cos^2\frac{\pi}{8}$ קרוב

ל EPR שבו נותנים $x\oplus y=0$

$s=0$, $t=1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[V_0\otimes V_{-\frac{\pi}{8}}+V_{\frac{\pi}{2}}\otimes V_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}\right]$$

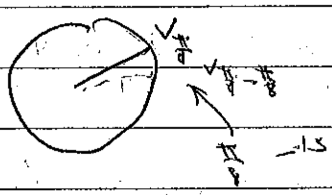


$\cos^2\frac{\pi}{8}$ קרוב ל EPR שבו

נותנים $x\oplus y=0$

מקרה 3 $s=1$, $t=0$

כנ"ל

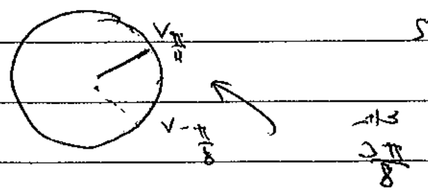


מקרה 4 $s=1$, $t=1$

הוא $\cos^2\frac{\pi}{8}$ קרוב

ל $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|01\rangle+|10\rangle\right]$

שבו נותנים $x\oplus y=1$



תשובה מיידית.

דרך אחרת לעשות את המצבים.

דרך אחרת קיצור נרבה.

נניח אנו מודדים בבסיס $\{v_1, v_2\}$, $v_1 \perp v_2$

אם נופלים ל v_1 – מוציאים תוצאה λ_1

v_2 λ_2

נבנה את המטריצה H $H=\lambda_1|v_1\rangle\langle v_1|+\lambda_2|v_2\rangle\langle v_2|$

H הרמיטי.

שימו לב, שהו"ע של H מתאימים את המדידה

והע"ע של H, את התוצאות שמשייכים לכל מדידה.

לכן, כדי לציין את מדידה מספיקה.

למשל אם A מודדת בבסיס $|0\rangle$ (תוצאה 1)

$|1\rangle$ (-1 〃)

אז המטריצה $|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=A_0$

אם A מודדת בבסיס $v_{\frac{\pi}{4}}$ תוצאה 1, $v_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$ -1

$|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=A_1$

אם B מודדת בבסיס $v_{\frac{\pi}{8}}$ – 1, $v_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}}$ -1 $B_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

〃 〃 D $v_{\frac{\pi}{8}}$ 1, $v_{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}}$ -1 $\boxed{B_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}}$

אם H הוא observable עם וקטורים עצמיים W_i וע"ע λ_i

ו-v וקטור (ונשים לב שאלו ערכים בין [illegible])

אז $Hv = \sum \alpha_i \lambda_i v$

$$v^\dagger H v = \langle \sum \alpha_i v_i , \sum_j \alpha_j \lambda_j v \rangle = \sum \alpha_i^\dagger \alpha_j \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 \lambda_i$$

גודל ההטלה של v על W_i — הערך שמקבלים

הערך – $v^\dagger H v$ – התוחלת מהמדידה במצב.

נחזור ל CHSH, נסתכל על המשחק ש-A מקבל $s=0$

ונניח שהם משיבים ערך 1 כן, וערך -1 לא

(כלומר $x \to (-1)^x$). ה-observable המתאים A_0.

עכשיו $A_0 \times B_0$ (A_0, B_0 מטריצות)

יהיה $A_0 \times B_0$ ~, ולכן [illegible]

נסתכל שוב A, B ניתנים עם ו"ע V_i (W_j) וע"ע λ_i (μ_j)

אז $A \otimes B$ ~ עם ו"ע $V_i \otimes W_j$ וע"ע $\lambda_i \mu_j$.

ולכן המצב $V_i \otimes W_j$ עם ע"ע $(-1)^x \cdot (-1)^y = (-1)^{x \oplus y}$

ולכן מקבלים 1 כאשר $x \oplus y = 0$ (A ו-B קיבלו אותו ערך)

-1 " $x \oplus y = 1$ (" " " ערכים שונים)

$$\langle \psi | A_0 \otimes B_0 | \psi \rangle = E(A_0 \otimes B_0) = pr(\text{ניצחון} \mid s=t=0) - pr(\text{הפסד} \mid s=t=0)$$

כנ"ל, $s=0$, $t=1$; $s=1$, $t=0$

כאשר $s=t=1$

$$E(A_1 \otimes B_1) = pr(x=y \mid s=t=1) - pr(x \neq y \mid s=t=1)$$

הפוך קודם

$$= pr(\text{הפסד} \mid s\wedge t=1) - pr(\text{ניצחון} \mid s\wedge t=1)$$
$$= -\left[pr(\text{ניצחון} \mid s\wedge t=1) - pr(\text{הפסד} \mid s\wedge t=1) \right]$$

$$pr(\text{ניצחון}) - pr(\text{הפסד}) =$$ ולכן:

$$\frac{1}{4}\left[\langle\psi| A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1 |\psi\rangle \right]$$

כשמשתמשים במצב שזור $\psi = EPR$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \langle\psi| A_0\otimes B_0|\psi\rangle = \langle\psi| A_0\otimes B_1|\psi\rangle = \langle\psi| A_1\otimes B_0|\psi\rangle = -\langle\psi| A_1\otimes B_1|\psi\rangle$$

$$pr(\text{ניצחון}) = \tfrac{1}{2}+\varepsilon$$ ולכן
$$pr(\text{הפסד}) = \tfrac{1}{2}-\varepsilon$$

$$2\varepsilon = (\tfrac{1}{2}+\varepsilon)-(\tfrac{1}{2}-\varepsilon) = pr(\text{ניצחון}) - pr(\text{הפסד}) = \frac{1}{4}\left[4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$pr(\text{ניצחון}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\cos^2\frac{\pi}{8}}$$

א1 [illegible]

$$pr(\text{ניצחון}) - pr(\text{הפסד}) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}\,(1\;0\;0\;1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1\;0\;0\;1)\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}\cdot 4}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\;0\;0\;1)}_{\psi}\;\underbrace{\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{A_0\otimes B_0 + A_0\otimes B_1 + A_1\otimes B_0 - A_1\otimes B_1}\;\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\psi}$$

[illegible]