חשיבה לוגית והנמקה

נכתב ע"י אמיר רובינשטיין

אפריל 2010

תוכן העניינים

הקדמה: חשיבה לוגית והנמקה 3
חלק ראשון: חשיבה לוגית 5
חלק שני: הנמקה וטכניקות הוכחה 24
תרגילים 40
פתרונות לתרגילים 43
מקורות 45

הקדמה: חשיבה לוגית והנמקה

נפתח בשתי דוגמאות:

דוגמה 1: מרק או סלט

רונן בן השבע ישב במסעדה עם משפחתו לרגל יום הולדתו. בתפריט היה כתוב שהמנה הראשונה כוללת מרק או סלט. כשהגיע המלצר אמר לו רונן: "אני רוצה מרק וסלט". ענה לו המלצר: "אי אפשר את שניהם. זה מרק או סלט". "זה לא הגיוני," ענה רונן, "אתמול אימא שאלה אותי אם אני רעב **או** צמא, ועניתי שכן, אז היא הביאה לי **גם** סנדוויץ' **וגם** מיץ תפוזים!"

דוגמה 2: ישראלים אוהבים שוקולד?

נסתכל על שתי הטענות הבאות:

טענה א': תושבי מדינת ישראל הם חלק מאוכלוסיית העולם.

טענה ב': חלק מאוכלוסיית העולם אוהב שוקולד.

ללא ספק שתי הטענות הללו נכונות. אם כך, נִראה שניתן להסיק את המסקנה הבאה:

מסקנה: תושבי מדינת ישראל אוהבים שוקולד.

בודאי ברור לכם שהמסקנה הזו אינה נכונה (גם אם אינכם מכירים אישית ישראלי שלא אוהב שוקולד...).

שתי הדוגמאות שלעיל באות להמחיש את מטרות הקורס. הדוגמה הראשונה מראה שבשפה העברית, כמו בכל שפה טבעית (שפת בני אדם) אחרת, קיימת דו משמעות ולעיתים רב משמעות. אותן מילים ואותם משפטים יכולים להיות מובנים לעיתים בדרכים שונות. משמעות המילה "או" בתפריט המסעדה היא "**<u>או</u>** מרק **<u>או</u>** סלט **<u>אך לא שניהם</u>**", ואילו כאשר שואלים אדם אם הוא רעב או צמא, בהחלט ייתכן שהשניים מתקיימים בו זמנית. בדוגמה השנייה אנו רואים שהסקת מסקנות מתוך מידע שברשותנו צריכה להיעשות בזהירות, שכן אנו עלולים להסיק מסקנות שגויות. אם כן, מה בתהליך ההיסק בדוגמה היה שגוי?

הלוגיקה המתמטית היא ענף במתמטיקה שעוסק בין השאר בעניינים כאלו. היא מאפשרת הסרת רב משמעות שקיימת בשפות בני אדם ע"י קביעת כללים מדויקים להצגת טענות שונות באופן שניתן להבנה בצורה אחת בלבד. הלוגיקה גם עוסקת במערכות כללים להסקת מסקנות תקפות מתוך נתונים או הנחות

שברשותנו. הלוגיקה התחילה את דרכה ביוון העתיקה כענף בפילוסופיה, אולם בעקבות התפתחויות רבות ומשמעותיות בכיוונים הפורמאליים שלה היא נחשבת כיום כאמור גם לענף במתמטיקה.

הלוגיקה משמשת כבסיס התיאורטי המרכזי למדעי המחשב. היא הכרחית, למשל, כאשר אנו מעוניינים "לדבר" עם מכונה (כמו מחשב), זאת משום שתקשורת עם מחשב חייבת להיות מאוד מדויקת וחד משמעית, ועליה לעמוד בכללים לוגיים שנקבעו מראש. פיתוח חשיבה לוגית נחוץ גם להתמודדות עם בעיות שונות ומגוונות, בעיקר בתחומי המדע והטכנולוגיה, שדורשות ניתוח מדויק ומסודר של תהליכים ורעיונות. בנוסף, היכולת לנמק טענות באופן מדויק תוך הימנעות מכשלים לוגיים שיפגעו בתקפות המסקנות היא כלי מרכזי במתמטיקה ובמדעי המחשב.

לקורס זה יש, אם כן, שתי מטרות עיקריות:

1. לפתח חשיבה לוגית
2. לפתח מיומנות בטכניקות להוכחות מתמטיות

בין השאר, נלמד לנסח טענות בצורה חד משמעית ומדויקת, נלמד לפתח חשיבה ביקורתית כלפי תהליכי הסקת מסקנות, ונראה כיצד המתמטיקה מסייעת לנו בהתמודדות עם סוגיות כדוגמת אלו שהועלו בדוגמאות הקודמות ועם סוגיות נוספות. הנה עוד מספר דוגמאות לסוגיות כאלו:

- מתי נאמר שאם תנאי מסוים מתקיים אז מכך נובע שתוצאה מסוימת מתקיימת גם כן? בקיצור, מתי נאמר ש- "אם a אז b" ? ומתי נאמר שהדבר לא כך, כלומר שלא נכון ש"אם a אז b" ?
- מה הטענה ההפוכה לטענות מהצורה: "לכל אריה יש זנב" ? ומהצורה "קיים כלב עם כנפיים" ?
- מה המשמעות של הביטוי "אם ורק אם" ?
- מהו "תנאי הכרחי" ? מהו "תנאי מספיק" ?
- מתי נאמר ששתי טענות "שקולות זו לזו" ?

הקורס אינו מניח ידע קודם במתמטיקה או במדעי המחשב. רוב הדוגמאות שיינתנו הן פשוטות ביותר מבחינת הסיבוך המתמטי שלהן, זאת כדי להדגיש את הרעיונות הלוגיים המרכזיים. יש להדגיש שזהו אינו קורס בלוגיקה פורמאלית, לא בהיקפו ולא במידת הפורמאליות שלו. לפיכך לעיתים נוותר על העיסוק המדויק והפורמאלי למניעת "הליכה לאיבוד" בסבך המתמטי.

חלק ראשון: חשיבה לוגית

1. פסוקים

בבסיס הלוגיקה (ליתר דיוק הלוגיקה הקלאסית, שהיא ענף מסוים של הלוגיקה) עומדת ההנחה שכל טענה היא בהכרח אמיתית או שקרית, אך לא שניהם. זו היתה אחת מטענותיו המרכזיות של הפילוסוף היווני הנודע אריסטו (384 לפנה"ס - 322 לפנה"ס), ועליה השתיתו פילוסופים רבים את טיעוניהם מאז ועד היום.

אף כי הנחה זו עשויה להישמע טריוויאלית, היא אינה ברורה מאליה ואינה בהכרח נכונה בכל הקשר. ישנם משפטים וטענות שאנו משתמשים בהם בחיי היומיום שאין להם בהכרח מעמד מוחלט של "אמת" או "שקר". לכן טיעונים שכאלה אינם נחשבים טיעונים לוגיים קלאסיים. ישנם ענפים חדשים יחסית של הלוגיקה, כגון "לוגיקה עמומה" (Fuzzy logic) העוסקים בטענות שאינן אמיתיות או שקריות באופן חד משמעי.

<u>תרגיל למחשבה</u>: חישבו על שלושה סוגי משפטים: משפט שמעמדו כמשפט אמיתי הוא מוחלט, משפט שמעמדו כמשפט שקרי הוא מוחלט, ומשפט שאין לו מעמד מוחלט כזה.

נתחיל אם כן בהגדרת המושג הבסיסי ביותר בלוגיקה – הפסוק.

הגדרה: ***פסוק*** (*proposition*) הוא משפט או הצהרה שהיא או אמיתית או שקרית אך לא שניהם.

מקובל לציין באותיות T ו- F את מעמדם של פסוקים כפסוקי אמת (TRUE) או שקר (FALSE), בהתאמה.

דוגמה: הפסוק "1+1=2" הוא פסוק אמת, ואילו הפסוק "1+1=3" הוא פסוק שקר.

לעיתים אין אנו יודעים האם משפט מסוים הוא אמיתי או שקרי, אבל אנו יודעים שהוא חייב להיות אמיתי או שקרי ולא שניהם. משפט כזה עונה גם הוא להגדרה של פסוק. במילים אחרות, יש להבדיל בין מעמדו של משפט כמשפט אמיתי או שקרי, לבין השאלה האם ידוע לנו מהו מעמד זה.

דוגמה: המשפט "יורד עכשיו שלג בלונדון" הוא פסוק, מכיוון שאו שהוא אמיתי או שהוא שקרי, גם אם איננו יודעים איזו משתי האפשרויות מתקיימת.

הנה מספר דוגמאות למשפטים שאינם פסוקים:

- "מה השעה?"
- "סגור את הדלת!"
- "$x+1=2$"

בשתי הדוגמאות הראשונות מופיעים משפטים שאינם יכולים להיחשב אמת או שקר, שכן הם כלל לא מבטאים טענה כלשהי. בדוגמה השלישית למשתנה x איך ערך מסוים (שכן הוא משתנה) ולכן לא ניתן לומר שהטענה היא אמיתית או שקרית (שימו לב שלא מדובר כאן בחוסר ידיעה לגבי ערכו של x).

2. פרדוקסים

סוג נוסף של טענות שאינן פסוקים הוא הפרדוקסים: משפטים שמכילים סתירה פנימית כלשהי.

לדוגמה: "משפט זה הוא שקרי" הוא פרדוקס. מצד אחד, אם הוא משפט אמיתי, אז מכיוון שתוכנו אמיתי נובע שהוא משפט שקרי. מאידך גיסא, אם המשפט הוא שקרי, ההפך ממנו נכון, כלומר המשפט הוא אמיתי. מכאן שהמשפט לא יכול להיות לא אמיתי ולא שקרי, ובפרט איננו פסוק.

המשפט "לכל כלל יש יוצא מן הכלל" גם הוא פרדוקס (האם לכלל שמופיע במשפט הזה יש יוצא מן הכלל?) וכך גם התשובה המפורסמת במבחנים אמריקאיים "אף תשובה אינה נכונה" (האם הגיוני לסמן תשובה כזו?). יש אינספור דוגמאות לפרדוקסים מאתגרים למדי מסוגים שונים, חלקם השפיעו רבות על המדע ועל הפילוסופיה של המדע.

3. קַשָּׁרִים לוגיים

כשם שבאלגברה ניתן ליצור ביטויים מורכבים בעזרת פעולות אלגבריות על משתנים ועל קבועים (למשל $2+3$, $\sin(x) - y/2$), גם בלוגיקה יש דרך להרכיב פסוקים פשוטים (הנקראים פסוקים אטומיים) לכדי פסוקים מורכבים. הדבר נעשה בעזרת **קשרים לוגיים** (logical connectives), שכשמם כן הם – מקשרים בין פסוקים. נכיר עתה את הקשרים החשובים.

3.1. שלילה (Not)

בהינתן פסוק כלשהו p, גם $\neg p$ הוא פסוק (קרי: השלילה של p , לא p , not p). אמיתותו של הפסוק $\neg p$ הפוכה לזו של p. כלומר $\neg p$ אמת כאשר p שקר, ולהיפך.

לדוגמה, אם

p = "היום יום שלישי"

אז

$\neg p$ = "לא נכון שהיום יום שלישי"

או במילים אחרות

$\neg p$ = "היום לא יום שלישי"

בימי שלישי p הוא אמת ואילו $\neg p$ הוא שקר. בכל יום אחר בשבוע p הוא שקר ודווקא $\neg p$ אמת.
דרך נוחה להציג את הקשר בין אמיתותו של p לזו של $\neg p$ היא בטבלה, הנקראת טבלת אמת:

p	$\neg p$
T	F
F	T

טבלה 1: טבלת אמת לקשר $\neg$

3.2. וגם (And)

בהינתן שני פסוקים כלשהם p ו- q, גם $p\wedge q$ הוא פסוק (קרי: p וגם q, p and q). להלן טבלת אמת שמציגה את הקשר בין אמיתותו של $p\wedge q$ לבין אמיתותם של כל אחד מ- p ו- q:

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

טבלה 2: טבלת אמת לקשר $\wedge$

הטבלה מראה שהפסוק $p \wedge q$ הוא אמת רק כאשר שני הפסוקים הפשוטים שמרכיבים אותו הם אמת (במילים אחרות מספיק שאחד מהם יהיה שקר, כדי ש- $p \wedge q$ יהיה שקר).

לדוגמה, נסמן:

p = "אני רעב" , q = "אני צמא"

אז

$p \wedge q$ = "אני רעב וגם אני צמא"

ופסוק זה הוא אמת רק כאשר אני רעב וצמא בו זמנית. מספיק שאינני צמא או שאינני רעב, כדי שהפסוק יהיה שקרי.

כדאי לשים לב להבדל עקרוני בין הקשר $\neg$ לקשר $\wedge$. בעוד הקשר הראשון מופעל על פסוק יחיד (בדומה לפעולות באלגברה כמו $-x$, $\sin(x)$ וכו'), הקשר השני מקשר בין שני פסוקים (בדומה לפעולות אלגבריות כמו $x+y$, $x-y$). לקשרים מהסוג הראשון קוראים **קשרים אונאריים** (unary), ואילו קשרים מהסוג השני נקראים **קשרים בינאריים** (binary). כל יתר הקשרים שנראה כעת הם קשרים בינאריים.

3.3. או (Or)

בהינתן שני פסוקים כלשהם p ו- q, גם $p \vee q$ הוא פסוק (קרי: p או q, p or q). להלן טבלת אמת שמציגה את הקשר בין אמיתותו של $p \vee q$ לבין אמיתותם של כל אחד מ- p ו- q:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

טבלה 3: טבלת אמת לקשר $\vee$

כלומר הפסוק $p \vee q$ הוא אמת כאשר לפחות אחד מבין הפסוקים הפשוטים שמרכיבים אותו הוא אמת (או שבדיוק אחד מהם אמת, או ששניהם אמת).

לדוגמה, אם

$q =$ "אני צמא" , $p =$ "אני רעב"

אז

$p \vee q =$ "אני רעב או שאני צמא"

ופסוק זה הוא אמת כאשר אני רעב, או כאשר אני צמא (וכמובן גם כאשר אני רעב וצמא בו זמנית). הפסוק שקרי למשל אחרי ארוחת צהרים דשנה שבסיומה שתיתי קנקן לימונדה.

3.4. או בלעדי (Exclusive Or, XOR)

לעיתים אנו מעוניינים לבטא טענה מהסוג "a או b", תוך איסור האפשרות ש- a ו- b יתקיימו שניהם. למשל, בדוגמה בה פתחנו את ההקדמה, כאשר בתפריט מופיעות המילים "מרק או סלט", אין הכוונה שנוכל להזמין את שניהם (ללא תוספת תשלום). לשם כך ישנה אבחנה בין הקשר $\vee$ שאותו ראינו, לבין קשר אחר, המכונה "או בלעדי" (או בשמו הנפוץ יותר xor, שהוא קיצור של השם באנגלית): בהינתן שני פסוקים כלשהם p ו- q, גם $p \oplus q$ הוא פסוק (קרי: p 'קסור' q, p xor q). להלן טבלת אמת שמציגה את הקשר בין אמיתותו של $p \oplus q$ לבין אמיתותם של כל אחד מ- p ו- q:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

טבלה 4: טבלת אמת לקשר $\oplus$

ההבדל בין טבלת האמת של $\oplus$ לבין זו של $\vee$ הוא בשורה הראשונה בלבד, המבטאת מצב שבו שני הפסוקים p ו- q הם אמת. הפסוק $p \oplus q$ הוא אמת כאשר **בדיוק אחד** מהפסוקים p או q הוא אמת (אך לא שניהם, מצב שבו הפסוק $p \vee q$ הוא אמת).

נמחיש את ההבדל באמצעות דוגמה נוספת. נניח שאדם יושב בביתו ושומע יללות חתול. ההסבר שהוא נותן לעצמו לשמע היללה הוא: "מיצי מיללת או שברדיו משמיעים יללות חתול". אם נסמן:

$q =$ "ברדיו משמיעים יללות חתול" , $p =$ "מיצי מיללת"

אז הפסוק $p\vee q$ מייצג את טענת האדם, תוך לקיחה בחשבון של האפשרות ששני הדברים מתקיימים גם יחד – שמיצי מיללת ובו זמנית ברדיו משמעים יללות חתול (אולי מיצי שומעת את היללות ומגיבה להן...).

לעומת זאת הפסוק $p\oplus q$ מייצג טענה לפיה או שמיצי מיללת, או שהרדיו משמיע יללות חתול, אך לא שניהם (טענה שמתאימה למצב שבו נשמעה יללה אחת בלבד, למשל).

3.5. גרירה (Implication)

כדי לבטא טענה מהצורה "אם ... אז ...", נשתמש בקשר הגרירה המסומן $\rightarrow$. בהינתן שני פסוקים כלשהם p ו- q, גם $p\rightarrow q$ הוא פסוק (קרי: p גורר q , אם p אז q , p implies q , if p then q).
להלן טבלת אמת שמציגה את הקשר בין אמיתותו של $p\rightarrow q$ לבין אמיתותם של כל אחד מ- p ו- q:

p	q	$p\rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

טבלה 5: טבלת אמת לקשר $\rightarrow$

נשים לב ש- $p\rightarrow q$ הוא שקר רק במצב אחד: כאשר p אמת ו- q שקר. את שתי השורות הראשונות בטבלה קל להבין: הגיוני לומר ש- p גורר את q אם כאשר p הוא אמת, גם q הוא אמת (שורה 1), ואילו כאשר p אמת אבל q שקר (שורה 2) הדבר מעיד על כך ש- p אינו גורר את q, ואכן במצב זה $p\rightarrow q$ שקר. את שתי השורות האחרונות בטבלה קשה יותר להבין. נבחן לשם כך את הדוגמה הבאה. פוליטיקאי מבטיח טרם הבחירות: "אם אבחר לראשות הממשלה אוריד את המיסים". נשים לב שלא נוכל להאשים את הפוליטיקאי בהפרת הבטחתו לבוחר, אם כלל לא נבחר לראשות הממשלה, וזאת ללא קשר לשאלה האם המיסים ירדו או לא לאחר הבחירות. בדוגמה הזו התנאי שהתנה הפוליטיקאי ("אם אבחר") כלל לא התממש, ולכן לא ניתן להאשימו בהפרת הבטחה, כלומר הוא עמד בהבטחתו. המקרה היחיד שבו נתלונן (שוב) על שחיתות בפוליטיקה הוא כאשר הפוליטיקאי כן נבחר לראשות הממשלה (p הוא אמת) אבל לא הוריד את המיסים (q הוא שקר). במקרה כזה אכן $p\rightarrow q$ הוא שקר.

ברוח הדוגמה האחרונה, נוח לפעמים להבין את הפסוק $p \rightarrow q$ כחוזה, שבו אם p מתקיים, גם q צריך להתקיים, אחרת החוזה מופר. בכל מצב אחר החוזה אינו מופר. לפעמים נוח יותר לראות בפסוק הזה קשר בין תנאי ותוצאה (או הנחה ומסקנה). משום כך נכנה לעיתים את הפסוק p "התנאי", ואת q "התוצאה". כדאי להכיר את כל הדרכים הבאות לבטא את הפסוק $p \rightarrow q$, שמייצגות דרכי הסתכלות שונות על משמעותו:

- p גורר q
- q נובע מ- p
- אם p אז q
- p תנאי מספיק ל- q
- q תנאי הכרחי ל- p
- p רק אם q

כדאי גם לשים לב שהטענה "אם 1+1=3 אז היום יום שלישי" היא נכונה תמיד, בכל יום בשבוע, שכן התנאי 1+1=3 כלל לא מתקיים. בהמשך נכנה טענות כאלו בשם "טענות שמתקיימות באופן ריק".

.3.6 גרירה דו-כיוונית (Biconditional)

הקשר האחרון אותו נכיר הוא קשר המבטא שקילות בין שתי טענות. בהינתן שני פסוקים כלשהם p ו- q, גם $\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$ הוא פסוק (קרי: p אם ורק אם q , p if and only if q). להלן טבלת שייכות שמציגה את הקשר בין אמיתותו של $p \leftrightarrow q$ לבין אמיתותם של כל אחד מ- p ו- q:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

טבלה 6: טבלת אמת לקשר $\leftrightarrow$

ניתן לראות שהפסוק $p\leftrightarrow q$ הוא אמת כאשר שני הפסוקים p ו- q "מסכימים זה עם זה" – דהיינו כששניהם אמת או כששניהם שקר. במקרה כזה אומרים ש- p הוא תנאי הכרחי ומספיק עבור q (וגם ההפך נכון). את המילים "אם ורק אם" נהוג לעיתים לקצר ל- אם"ם (באנגלית iff).

לסיכום, הכרנו חמישה קשרים לוגיים: אחד אונארי, וארבעה בינאריים. הקשרים משמשים להרכבת פסוקים, ומעמדם של פסוקים מורכבים אלו כפסוקי אמת או שקר, כתלות בפסוקים הפשוטים יותר שמרכיבים אותם, מוגדר ע"י טבלאות האמת שראינו לכל קשר.

4. פסוקים מורכבים והַצְרָנָה לוגית

הצרנה (מלשון "צורה") לוגית הוא תהליך של תרגום משפט בשפה מדוברת לטענה ב"שפת הלוגיקה", כלומר לטענות שניתן לנסחן באמצעות אותיות המייצגות פסוקים כלשהם, וקשרים לוגיים (כאלו שראינו ואחרים). הצרנה לוגית מסירה רב משמעות שקיימת בשפה המדוברת, ומאפשרת למכונה (כמו מחשב) להבין את הטענות שהוצרנו. למעשה, כשאנו כותבים תוכנית מחשב, אנו נעזרים בשפת תכנות כלשהי, שמהווה דרך מסוימת להצרין את הפקודות לשפה שמחשב יוכל להבין (שפות תכנות שונות זו מזו בין השאר בדרך שבה מבצעים את ההצרנה הזו, אבל יש בין שפות מסוימות גם הרבה נקודות דמיון).

נדגים הצרנה פשוטה של הפתגם: "מי שטרח בערב שבת יאכל בשבת". את המשפט הזה אפשר לנסח גם כך: "אם טרחת בערב שבת אז תאכל בשבת". נסמן:

"טרחת בערב שבת" $= p$,   "תאכל בשבת"= q

הצרנת הפתגם לשפה לוגית היא אם כן: $p \rightarrow q$.

נמשיך עם הדוגמה הבאה: "כדי לעבור את הקורס חייבים להיות רשומים לקורס ולא להיכשל בבחינה". המשפט מציג שני תנאים הכרחיים למעבר הקורס: 1) להיות רשומים לקורס, 2) לא להיכשל בבחינה. במילים אחרות אם אדם מסוים עבר את הקורס, מכך נובע שהוא היה רשום לקורס וגם לא נכשל בבחינה. נסמן את חלקי המשפט האופן הבא:

"לעבור את הקורס" $= p$,   "להיות רשומים לקורס" $= q$,   "להיכשל בבחינה" $= r$

כעת ניתן לבטא את הטענה שבמשפט באמצעות הפסוקים p,q,r ובעזרת קשרים לוגיים שראינו קודם:

$$p \to (q \wedge (\neg r))$$

הערה: שאלה שעשויה לעלות כאן בודאי היא מדוע לא כתבנו כך:

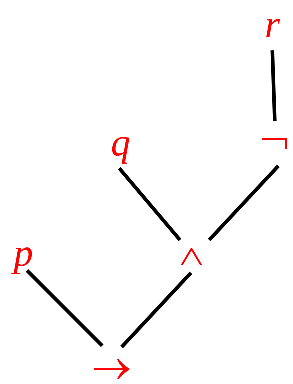
$$(q \wedge (\neg r)) \to p$$

התשובה היא שזו לא הטענה שמופיעה במשפט. המשפט לא טוען שמי שרשום לקורס וגם לא נכשל בבחינה בהכרח עבר את הקורס. ייתכן שישנם תנאים נוספים למעבר הקורס, כמו למשל לא להעתיק בבחינה. באופן כללי, הפסוק $b \to a$ והפסוק $a \to b$ אינם מבטאים את אותה טענה. נחזור לכך בהמשך, כשנטפל במושג שקילות.

שימו לב לסוגריים שנותנים לפסוק מבנה חד משמעי. הדבר דומה מאוד לסוגרים שאנו רושמים בביטויים אלגבריים, כדי לציין סדר פעולות מסוים. כמו באלגברה, גם בלוגיקה ישנו סדר קדימויות בין הקשרים השונים. למעשה, במקרה הזה יכולנו לוותר על הסוגריים ולכתוב $p \to q \wedge \neg r$, משום שהקשר $\neg$ קודם לקשר $\wedge$, וזה בתורו קודם לקשר $\to$. ליתר בטחון, אפשר תמיד לשים סוגריים למניעת טעויות ולשם בהירות. יחד עם זאת מקובל להשמיט את הסוגריים סביב הקשר $\neg$, שכן הוא קודם לכל יתר הקשרים. ישנו עוד מקרה בו נהוג להשמיט את הסוגריים, כפי שיצוין בהמשך.

בשפה טבעית, האינטונציה (בדיבור) והפיסוק (בכתב) משמשים פעמים רבות בתפקיד הסוגריים. ועדיין, קיים לעיתים כפל משמעות תחבירית. למשל, במשפט הבא: "בחופש אסע לאילת או אטוס לקפריסין ואשתכר". פירוש אחד למשפט הוא שהדובר ייסע לאילת או לקפריסין, ובכל מקרה ישתכר. פירוש אחר הוא שהדובר ייסע לאילת, או שהוא יטוס לקפריסין ושם ישתכר (באילת לא ישתכר). הצרנה לוגית מחייבת אותנו לבחור מבין האפשרויות הללו ולהסיר את כפל המשמעות.

את מבנהו של פסוק ניתן לתאר באמצעות **עץ מבנה**. לדוגמה, עץ המבנה של הפסוק שבדוגמה הקודמת נראה כך:



איור 1: עץ מבנה של הפסוק $p \to (q \wedge (\neg r))$

ישנן שיטות לזיהוי אוטומטי של מבנה של פסוק (בהן יכול להשתמש אדם, או מחשב). ההצגה המדויקת של שיטות אלו חורגת ממסגרת קורס זה, והן נלמדות בד"כ בקורס אקדמי בלוגיקה. באופן לא פורמלי, עלינו לאתר את ה"קשר המרכזי" של הפסוק. בדוגמה הנ"ל זהו הקשר $\rightarrow$. משמעות הדבר היא שהפסוק הנתון הוא מהצורה $a \rightarrow b$, כאשר a ו- b יכולים להיות בעצמם פסוקים מורכבים. במקרה שלנו a הוא הפסוק האטומי p, ואילו b הוא הפסוק המורכב $(\neg r) \wedge q$. הפסוק האחרון הוא מהצורה $a \wedge b$, כאשר a הפעם הוא הפסוק האטומי q, ואילו b הוא הפסוק המורכב $\neg r$. פסוק זה הוא מהצורה $\neg a$ כאשר a הוא הפסוק האטומי r. באופן כללי, בכל שלב עלינו לאתר את הקשר המרכזי, ולהמשיך בפירוק הפסוק למרכיביו עם הפסוקים הפשוטים יותר שהקשר המרכזי פועל עליהם (אחד או שניים, בהתאם לסוג הקשר).

5. שקילות

לעיתים אנו מטפלים בפסוקים שנראים לנו שונים זה מזה, כאשר למעשה מדובר בשני פסוקים שמבטאים את אותה טענה. דוגמה פשוטה לכך היא הפסוקים $p \wedge q$ ו- $q \wedge p$. אמנם אלו שני פסוקים שונים, אבל ברור שהם מבטאים את אותה טענה, ובכל המקרים יש להם אותו מעמד כפסוקי אמת או שקר ("בכל המקרים" פירושו בכל מצב אפשרי מבחינת אמיתותם של p ו- q). טענה דומה מופיעה גם באלגברה, עבור פעולות החיבור והכפל, ומכונה "חוק החילוף": $x+y = y+x$, $x \cdot y = y \cdot x$. אם כן, הקשר $\wedge$ מקיים גם הוא את חוק החילוף, המתבטא בשקילות שהוצגה לעיל.

כאשר שני פסוקים a ו- b מקבלים תמיד אותו מעמד - אמת או שקר - כתלות בפסוקים שמרכיבים אותם, אנו אומרים שהם פסוקים **שקולים** זה לזה ומסמנים $a \equiv b$. שימו לב ש- $a \equiv b$ אם"ם $a \leftrightarrow b$ הוא תמיד אמת (אגב, המשפט האחרון בעצמו מבטא שקילות בין שתי טענות: הטענה כי $a \equiv b$ והטענה כי $a \leftrightarrow b$ הוא תמיד אמת).

חוקי החילוף, הקיבוץ והפילוג עבור הקשרים $\wedge$ ו- $\vee$ מוצגים בטבלה הבאה כשקילויות בין פסוקים:

חילוף	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
קיבוץ	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

פילוג	$(p\vee q)\wedge r \equiv (p\wedge r) \vee (q\wedge r)$ $(p\wedge q)\vee r \equiv (p\vee r) \wedge (q\vee r)$

טבלה 7: חוקי החילוף, קיבוץ ופילוג עבור $\wedge$ ו- $\vee$

הערה: מכיוון שהקשרים $\wedge$ ו- $\vee$ מקיימים את חוק הקיבוץ, נהוג להשמיט את הסוגריים ולכתוב פשוט $p\vee q\vee r$ ו- $p\wedge q\wedge r$ שכן הסוגריים ממילא לא משנים דבר.

כדי להיווכח ששני פסוקים שקולים זה לזה, אפשר לשרטט טבלת אמת עבור הפסוקים הללו, ולראות שאכן הם תמיד "מסכימים" זה עם זה מבחינת הערכים T ו- F.

נדגים זאת עבור שני הפסוקים $p\leftrightarrow q$ ו- $\neg(p\oplus q)$.

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\oplus q$	$\neg(p\oplus q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T

טבלה 8: טבלת אמת להוכחת שקילות הפסוקים $p\leftrightarrow q$ ו- $\neg(p\oplus q)$

מה שרואים בטבלה הוא, שבכל אחד מארבעת המצבים האפשריים מבחינת אמיתותם של p ו- q, הפסוקים $p\leftrightarrow q$ ו- $\neg(p\oplus q)$ שניהם אמת או שניהם שקר, כלומר הם שקולים זה לזה, ומבטאים למעשה טענות שקולות (הדבר לא מפתיע, שכן הקשר $\leftrightarrow$ מבטא "הסכמה" בין p ו- q, ואילו הקשר $\oplus$ מבטא מצב שבו בדיוק אחד מהם הוא אמת, כלומר "חוסר הסכמה", ולכן בתוספת קשר השלילה מתקבלים פסוקים שקולים).

לעיתים נדמה לנו ששני פסוקים הם בסה"כ דרך שונה לבטא את אותה טענה, ואנו מגלים כי הדבר לא כך. למשל, כפי שהוזכר קודם, הפסוק $p\rightarrow q$ והפסוק $q\rightarrow p$ אינם מבטאים את אותה טענה, כלומר אינם שקולים, כפי שמוכיחה הטבלה הבאה:

p	q	$p\to q$	$q\to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

טבלה 9: טבלת אמת להפרכת שקילות הפסוקים $q \to p$ ו- $p \to q$

כאשר הפסוק p אמת והפסוק q שקר (שורה 2 בטבלה) הפסוק $p\to q$ הוא שקר, ואילו הפסוק $q\to p$ הוא אמת. ואכן, הדבר מתיישב עם ההיגיון: למשל, המשפט "אם היום יום שלישי אז יורד גשם" יהיה שקרי ביום שלישי (p אמת) לא גשום (q שקר), אבל המשפט "אם יורד גשם אז היום יום שלישי" אמיתי בכל יום לא גשום (ולא משנה אם זה יום שלישי או יום אחר בשבוע). גם בשורה 3 בטבלה יש הבדל בערכים של שני הפסוקים הללו (שם המצב הפוך מזה שבשורה 2). מספיק שבאחת השורות בטבלה יהיו ערכים שונים כדי שנאמר שהפסוקים אינם שקולים. שימו לב שבשורות 1 ו- 4 שני הפסוקים $p\to q$ ו- $q\to p$ אמיתיים, אבל כאמור, שקילות מחייבת שוויון בכל השורות (בכל המצבים האפשריים).

נציג עוד שתי שקילויות חשובות, שבהן נשתמש בחלק השני של הקורס. את שתיהן ניתן להוכיח באמצעות טבלת אמת כמודגם לעיל.

שקילות 1 $\quad p\to q \equiv (\neg q)\to(\neg p)$

שקילות 2 $\quad (p \vee q)\to r \equiv (p\to r) \wedge (q\to r)$

נוכיח את השקילות האחרונה:

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\to r$	$p\to r$	$q\to r$	$(p\to r)\wedge(q\to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F

F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

טבלה 10: טבלת אמת להוכחת שקילות הפסוקים $(p \vee q)\to r$ ו- $(p\to r) \wedge (q\to r)$

בטבלה הזו יש 8 שורות, המתאימות לכל אחד מ- 8 המצבים האפשריים של הפסוקים p, q, r. באופן כללי, עבור n פסוקים שונים, עלינו לבנות טבלה שמספר שורותיה הוא 2^n, זאת מכיוון שלכל פסוק ישנם שני מצבים אפשריים – אמת או שקר. במילים אחרות כל תוספת של פסוק אחד נוסף מכפילה ב- 2 את מספר המצבים האפשריים ולכן גם את מספר השורות בטבלה.

המשמעות של השקילות שזה עתה הוכחנו אינה טריוויאלית לרוב האנשים, שאינם מורגלים בחשיבה לוגית כמו זו שאנו עוסקים בה כאן. המשפט "אם אצטיין במתמטיקה או בפיזיקה אז אקבל תעודת הצטיינות" נראה לרבים כשקול למשפט "אם אצטיין במתמטיקה אקבל תעודת הצטיינות **או** אם אצטיין בפיזיקה אקבל תעודת הצטיינות". אבל שני המשפטים הללו אינם שקולים, כפי שניתן להיווכח ע"י בניית טבלת אמת מתאימה לשניהם, ואילו כאשר מחליפים את המילה **או** במילה **וגם** במשפט השני המשפטים שקולים כפי שמעידה טבלה 10.

6. הכַּמָּתִים "לכל" ו"קיים"

כיצד נצרין טענות כדוגמת "לכל מספר טבעי x מתקיים $x \le x^2$" וכדוגמת "קיים על פני כדור הארץ אדם שמדבר צרפתית" ? הקשרים שראינו עד כה לא מאפשרים זאת, ולשם כך צריך להעשיר את "שפת הלוגיקה" באמצעים נוספים. לשם כך משתמשים בסוג נוסף של קשרים, הנקראים **כמתים** (quantifiers): $\forall$ (לכל) ו- $\exists$ (קיים).

הכמת $\forall$ מציין שתכונה מסוימת מתקיימת לכל האלמנטים בהקשר שבו מתקיים הדיון. למשל, אם אנו דנים במספרים טבעיים, אז ניתן לכתוב:

$$\forall x \quad x \le x^2$$

וזהו פסוק אמת, שכן הטענה מתקיימת לכל מספר טבעי. לעומת זאת, אם הדיון נסב סביב מספרים ממשיים, הפסוק הנ"ל הוא פסוק שקר (מדוע?), וכנ"ל אם אנו עוסקים בבעלי חיים (אז הטענה פשוט אינה מוגדרת היטב).

הכמת $\exists$ מציין שקיים אלמנט (מבין האלמנטים בהם עוסק הדיון) שעבורו טענה מסוימת מתקיימת (ייתכן שקיימים רבים כאלו, כלומר קיים לפחות אחד). למשל:

$\exists x \quad x$ מדבר צרפתית

כאשר אנו דנים בבני האדם בכללם, הפסוק הזה הוא בודאי פסוק אמת (ביקור קצר בצרפת מספיק כדי להיווכח בכך). קל למצוא הקשר שעבורו הפסוק הזה הוא שקרי, למשל, סטודנטים שנרשמו לקורס "צרפתית למתחילים" (אלא אם הסתנן לשם דובר צרפתית שהסתיר את עובדת היותו דובר השפה...).

גם כדי לקבוע את אמיתותו של הפסוק

$$\exists x \quad x \leq x^2$$

עלינו לדעת מהו ההקשר בו אנו דנים, שכן פסוק זה אמיתי אם, למשל, x הוא מספר שלם כלשהו בין 1 ל- 10, אבל הוא שקרי אם x הוא שבר חיובי שקטן מ- 1.

המסקנה מהדוגמאות הללו היא שכדי לקבוע האם פסוק מסוים הוא אמת או שקר כאשר משתמשים בכמתים $\forall$ ו- $\exists$ עלינו לדעת מהו ההקשר בו אנו דנים, ומעתה נכנה הקשר זה בשם "**עולם הדיון**".

הערה: שימו לב שהביטוי $x \leq x^2$ (ללא כמתים) אינו פסוק, מכיוון ש- x הוא משתנה ואין לו ערך ספציפי.

נתבונן בכמה דוגמאות נוספות. איזו טענה מייצג הפסוק הבא?

$$\forall x \ \ \forall y \quad x+y < x \cdot y$$

נקרא משמאל לימין: לכל x ולכל y מתקיים ש- $x+y < x \cdot y$. האם זהו פסוק אמת? תלוי כמובן ב"עולם הדיון". אם הוא כולל את המספר 0.5 למשל אז הפסוק הוא שקר.

ומה ההבדל, אם בכלל, בין הפסוק הקודם לפסוק הבא?

$$\forall y \ \ \forall x \quad x+y < x \cdot y$$

קל להיווכח שאין הבדל, ומדובר בשני פסוקים שקולים (שניהם אמיתיים או שקריים "יחד", כתלות בעולם הדיון). לפיכך לפעמים נהוג לקצר ולרשום:

$$\forall x, y \quad x+y < x \cdot y$$

באופן דומה, נהוג לקצר ולרשום:

$$\exists x, y \quad x+y < x \cdot y$$

ומשמעותו של פסוק זה היא שקיימים x ו- y עבורם $x+y < x \cdot y$.

האם סדר הכמתים אינו משנה גם כאשר מדובר בשני כמתים שונים? למשל, האם הפסוק

$$\forall x \;\; \exists y \quad x+y \geq 0$$

שקול לפסוק

$$\exists y \;\; \forall x \quad x+y \geq 0$$

או שמדובר בשני פסוקים שמייצגים טענות שונות? הפסוק הראשון טוען שלכל x קיים y כך שמתקיים $x+y \geq 0$. אם עולם הדיון הוא כל המספרים הממשיים, זהו פסוק אמת, כי לכל x ניתן למצוא y כזה ש"מתאים לו", במובן זה שסכומם חיובי. פשוט נבחר $y = |x|$ ואכן $x + |x| \geq 0$ תמיד (מדוע? בידקו את המקרים כאשר x חיובי, אפס או שלילי). הפסוק השני טוען שקיים y מסוים, ש"מתאים" לכל x. האם אכן קיים y פלאי כזה? נוכל להראות שלא, ע"י כך שנניח לרגע שקיים y כזה (איננו יודעים מיהו, ולמעשה איננו יודעים עליו כלום, אלא רק מניחים שהוא קיים), ונראה שהוא לא מקיים את הדרוש ממנו, כלומר הוא לא "מתאים" לכל x. ואכן, תמיד נוכל למצוא x-ים שיחשפו את אי עמידתו בדרישות של אותו y: אם y שלילי, נבחר פשוט $x = 0$. אם $y = 0$ נבחר $x = -1$. ואם y חיובי, נבחר x שלילי שגדול מ- y בערכו המוחלט, למשל: $x = -2y$. כפי שהראנו, לא ייתכן שקיים y פלאי כזה, כי שום y לא היה מקיים **שלכל** x $x+y \geq 0$. ומכאן שהפסוק השני הוא פסוק שקר.

הערה: ההוכחה האחרונה נעשתה בטכניקה של **הוכחה ע"י סתירה**, בה נטפל ביתר פירוט בהמשך.

שאלה: כיצד היתה משתנה אמיתותם של הפסוקים הנ"ל בעולם דיון שכולל רק ממשיים שליליים, או רק ממשיים חיוביים?

עד כה הראינו דוגמאות לפסוקים בהם יש כמתים בלבד. ניתן כמובן לערב כמתים וקשרים מהסוג שראינו מוקדם יותר. בדוגמה הבאה נשתמש בסימונים:

$D(x)$ – x מתחלק ב- 4 ללא שארית

$C(x)$ – x זוגי

נרצה להצרין את הטענה: "יש מספרים זוגיים שמתחלקים ב- 4". ניתן לנסח את הטענה במונחים של הכמת "קיים" כך: "קיים מספר זוגי שמתחלק ב- 4" (שימו לב שהטענות הללו שקולות, שכן המילה קיים לא מחייבת שיהיה אלמנט יחיד שמקיים את התכונה). הניסוח האחרון שקול גם לניסוח "קיים מספר שהוא גם זוגי וגם מתחלק ב- 4". קיבלנו אם כן:

$$\exists x \, (C(x) \wedge D(x))$$

ומה לגבי:

$$\exists x\,(C(x) \to D(x))$$

האם זהו פסוק שקול? כנראה שלא, שכן באופן כללי $a\wedge b$ אינו שקול ל- $a\to b$. במה מתבטא אם כן חוסר השקילות? בכך, שהפסוק האחרון הוא פסוק אמת גם אם בעולם הדיון אין כלל מספרים זוגיים, שכן $C(x)\to D(x)$ אמיתי גם עבור מספרים אי-זוגיים (התנאי $C(x)$ שקרי). זאת בעוד שהפסוק הראשון שקרי בעולם דיון שלא כולל אף מספר זוגי, כי $C(x) \wedge D(x)$ אמיתי רק עבור מספרים זוגיים.

וכיצד נצרין את הטענה: "רק מספרים זוגיים מתחלקים ב- 4" ? שימו לב שלא נטען פה שכל מספר זוגי מתחלק ב- 4, אלא שאם מספר מתחלק ב- 4, הדבר מעיד על כך שהוא זוגי:

$$\forall x\,(D(x) \to C(x))$$

7. חוקי שלילה שימושיים

פעמים רבות, במהלך הוכחה מתמטית או במסגרת אחרת אנו נדרשים לנסח את שלילתה של טענה מסוימת, כלומר את הטענה ההפוכה לה (זו הטענה שאמיתותה הפוכה לזו של הטענה המקורית). בייחוד הדבר נחוץ כאשר אנו נדרשים להפריך טענה (להוכיח שהיא טענת שקר). ראינו כבר את הקשר $\neg$ שמשמש לשלילה של פסוק. נכיר כעת מספר שקילויות שימושיות וחשובות המערבות קשר זה, בהן נשתמש בהמשך כשנדון בטכניקות הוכחה. את השקילויות שבסעיפים 7.1 עד 7.4 אפשר להוכיח בעזרת טבלת אמת.

7.1. שלילה כפולה

שלילת שלילתו של משפט הוא המשפט עצמו. למשל, אם לא נכון ש- "היום לא יום שבת" אז היום יום שבת. באופן פורמלי:

- $\neg(\neg p) \;\equiv\; p$

מעניין לציין שאעפ"י ששקילות זו נראית ברורה מאליה, היא מסתמכת על הנחה בסיסית ביותר שהוזכרה בהקדמה לקורס, מבית מדרשו של אריסטו: כל טענה חייבת להיות או אמיתית או שקרית

אך לא שניהם יחד. ולפיכך אם לא נכון שהטענה שקרית, אז הברירה שנותרה היא שהיא אמיתית. במערכות לוגיות שלא מניחות הנחה זו (וקיימות כאלו), הטענה "לא נכון שהיום לא יום שבת" אינה שקולה לטענה "היום יום שבת", אולם דיון זה חורג ממסגרת הקורס.

7.2. חוקי דה מורגן (De-Morgan Laws)

חוקי דה-מורגן, ע"ש המתמטיקאי והלוגיקן בן המאה ה-19 אוגוסטוס דה-מורגן, הם למעשה השקילויות הבאות, אותן קל להוכיח בעזרת טבלת אמת:

- $\neg(p \wedge q) \;\equiv\; \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \;\equiv\; \neg p \wedge \neg q$

ניתן בעזרת חוקים אלו לשלול טענות מהצורה $p \wedge q$ ו- $p \vee q$. למשל, שלילת הטענה "אני רעב וגם צמא" היא "אני לא רעב או שאני לא צמא" (כמובן שישנה האפשרות שגם אינני רעב וגם אינני צמא, אפשרות המגולמת כבר במילה "או" שמיוצגת ע"י הקשר $\vee$). ובאופן דומה, שלילת הטענה "היום יום שלישי או יום רביעי" היא "היום לא יום שלישי וגם לא יום רביעי".

7.3. שלילת טענות מהצורה $p \rightarrow q$

ראינו מוקדם יותר שהפסוקים $p \rightarrow q$ ו- $q \rightarrow p$ אינם שקולים. אך האם אחד הוא שלילתו של השני? אם נביט שוב בטבלה 9 ניראה שישנן שורות בטבלה שבהן שני הפסוקים מקבלים את אותם ערכים, ולכן הם אינם שלילה זה של זה.

הפסוק $p \rightarrow q$ הוא שקר רק במקרה שבו p אמת ו- q שקר. אם כן שלילתו של $p \rightarrow q$ צריך להיות פסוק אמת רק במקרה זה. הפסוק $p \wedge \neg q$ הוא פסוק כזה בדיוק:

- $\neg(p \rightarrow q) \;\equiv\; p \wedge \neg q$

למשל, הטענה ההפוכה לטענה "אם יש עננים אז יורד גשם" היא הטענה: "יש עננים וגם לא יורד גשם".

7.4. שלילת טענות מהצורה $p \leftrightarrow q$

שלילת טענת אם"ם, כלומר טענה מהצורה $p \leftrightarrow q$ היא טענה המבטאת את "חוסר ההסכמה" בין שני הפסוקים p ו- q, כלומר מצב בו p אמת ו- q שקר, או להיפך:

- $\neg(p\leftrightarrow q) \;\equiv\; (p\wedge\neg q) \vee (\neg p\wedge q)$

כפי שראינו קודם, ניתן גם לקצר ולכתוב:

- $p\leftrightarrow q \;\equiv\; \neg(p\oplus q)$

7.5. שלילה עם כמתים

כיצד נשלול את הטענה "כל שרי הממשלה הצביעו בעד התקציב" ? נאמר ש"לא נכון שכל שרי הממשלה הצביעו בעד התקציב". ומה משמעות הדבר? ש"קיים שר (לפחות אחד, אולי הרבה) ש**לא** הצביע בעד התקציב". ובאופן כללי, אם $P(x)$ היא תכונה כלשהי שמקיים x, אז נקבל את הזהות החשובה הבאה:

- $\neg\forall x\, P(x) \;\equiv\; \exists x\, \neg P(x)$

שימו לב שבניגוד אולי לאינטואיציה הראשונית, $\neg\forall x\, P(x)$ אינו שקול ל- $\forall x\, \neg P(x)$. העובדה שלא כל שרי הממשלה הצביעו בעד התקציב לא שקולה לכך שכל שרי הממשלה לא הצביעו בעדו.

ומה השלילה של "קיים אדם שמדבר צרפתית" ? השלילה היא כמובן "לא קיים אדם שמדבר צרפתית", ובמילים אחרות "כל בני האדם **אינם** דוברי צרפתית". כלומר:

- $\neg\exists x\, P(x) \;\equiv\; \forall x\, \neg P(x)$

למעשה, יכולנו להגיע מהזהות הראשונה לשנייה ע"י שימוש בחוק השלילה הכפולה ובכמה מעברים פשוטים. מציבים בשני האגפים בזהות הראשונה במקום $P(x)$ את הפסוק $\neg Q(x)$, כאשר $Q(x)$ הוא שלילתו של $P(x)$, ומקבלים: $\exists x\, \neg\neg Q(x) \;\equiv\; \neg\forall x\, \neg Q(x)$. לפי חוק השלילה הכפולה ניתן לכתוב $\exists x\, Q(x) \;\equiv\; \neg\forall x\, \neg Q(x)$ וכל שנותר לעשות הוא לשלול את שני האגפים: $\neg\exists x\, Q(x) \;\equiv\; \neg\neg\forall x\, \neg Q(x)$ ושוב להשתמש בחוק השלילה הכפולה, ומקבלים את הזהות השנייה.

חלק שני: הנמקה וטכניקות הוכחה

8. מושג ה"הוכחה" (proof)

נפתח בשאלה מהי למעשה הוכחה מתמטית?

לשם כך נכיר תחילה את המושגים הבאים:

הנחה – טענה שמניחים שהיא נכונה או שמסכימים עליה בהקשר מסוים.

אקסיומה – הנחה בסיסית ומקובלת בהקשר רחב.

הן הנחה והן אקסיומה נחשבות "נתונים" שאפשר להשתמש בהם, ללא צורך להוכיחם. ההבדל ביניהם הוא בעיקר במידת הכלליות שלהם: אקסיומה היא בסיסית יותר ומקובלת בהקשרים רחבים יותר, ואילו הנחה יכולה להיות נכונה בהקשר צר, לצורך מקומי בלבד (למשל תרגיל מסוים). אקסיומות בודאי מוכרות לכם מלימודי הגיאומטריה בבית הספר.

והנה מושג חשוב נוסף:

כלל הֶיסֵק – כלל שמגדיר החלפה של טענה או קבוצת טענות בטענה אחרת.

דוגמה לכלל היסק נפוץ הוא כלל הקרוי Modus Ponens המגדיר החלפה של שני הפסוקים $a\rightarrow b$ ו- a בפסוק b. הדבר אף מתיישב עם ההיגיון, שכן אם ידוע לנו שהפסוקים $a\rightarrow b$ ו- a הם פסוקי אמת, אז נרצה להסיק שגם הפסוק b הוא פסוק אמת. יחד עם זאת נעיר, שבעיקרון כלל היסק לא חייב להיות "הגיוני", אלא הוא פשוט מגדיר החלפה תחבירית בין פסוקים. כמובן שכללי היסק "הגיוניים" מעניינים ושימושיים יותר. אנו לא ניכנס לעומקם של דברים מעבר לכך.

כעת ניתן להגדיר מהי הוכחה מתמטית, ועוד כמה מושגים נוספים:

הוכחה מתמטית היא סדרה של טענות, שכל אחת מהן יכולה להיות אקסיומה או הנחה, או לנבוע מטענות קודמות ע"י כללי היסק מוגדרים מראש. הטענה האחרונה בהוכחה נקראת מסקנה.

הפרכה של טענה היא הוכחה של שלילת הטענה.

משפט (theorem) הוא טענה שיש לה לפחות הוכחה אחת (במסגרת אקסיומות, הנחות וכללי היסק המוגדרים לצורך כך). טענה שטרם זכתה להוכחה או להפרכה קרויה **השערה** (conjecture).

מותר לטענה שכבר הוכחנו להופיע כאחת הטענות בהוכחתה של טענה אחרת. הדבר מהווה בסה"כ "קיצור דרך", שכן תמיד אפשר להחליף טענה שהוכחה בסדרת הטענות שמרכיבות את הוכחתה.

הוכחה מתמטית שלא עומדת בכללים הנ"ל נחשבת הוכחה לא תקפה: זוהי הוכחה שמופיעה בה טענה שאינה אקסיומה או הנחה, שלא נובעת מקודמותיה באמצעות כלל היסק נתון ואף אינה מהווה טענה שהוכחה בעבר (במסגרת אותן אקסיומות, הנחות וכללי היסק).

בסעיפים הבאים נסקור כמה טכניקות הוכחה נפוצות וחשובות. נתייחס הן לדרכים בהן מוכיחים טענות והן לדרכים להפרכתן, ע"פ סוג הטענה בה עוסקים.

9. הוכחה והפרכה של טענות הכללה וטענות קיום

9.1. אבחנה בין טענות הכללה לטענות קיום

כאשר אנו באים להוכיח או להפריך טענה, חשוב לדעת להבחין בין שני סוגים עיקריים של טענות: טענות הכללה וטענות קיום. **טענת הכללה** היא טענה המיוצגת ע"י פסוק הפותח בכמת $\forall$, ואילו **טענת קיום** מיוצגת ע"י פסוק הפותח בכמת $\exists$. טענת הכללה מייצגת הצהרה כללית לגבי תכונות של אלמנטים מסוימים, וטענת קיום מציינת שישנו (לפחות) אלמנט אחד שמקיים תכונות מסוימות (בין אם ההצהרות הללו אמיתיות או שקריות). בשפה טבעית אפשר לנסח בדרכים שונות כל אחד מסוגי הטענות הנ"ל. למשל, את טענת ההכללה $\forall x \quad x \le x^2$ אפשר לנסח בעברית במספר דרכים:

- לכל x $x \le x^2$
- לכל x מתקיים ש- $x \le x^2$
- עבור x כלשהו $x \le x^2$
- יהי x כלשהו, אז $x \le x^2$

ואת טענת הקיום $\exists x \quad x \le x^2$ אפשר לנסח כך:

- קיים x המקיים $x \le x^2$
- קיים x כך ש- $x \le x^2$
- עבור x מסוים מתקיים $x \le x^2$
- יש x כלשהו כך ש- $x \le x^2$
- חלק מהמספרים x מקיימים $x \le x^2$

9.2. הוכחת טענות הכללה

כדי להוכיח טענת הכללה עלינו להראות כי כל האלמנטים בעולם הדיון מקיימים את התכונה הרצויה. תיאורטית, אם עולם הדיון סופי יש באפשרותנו לעבור על כל האלמנטים שבו אחד-אחד. כמובן, שיטה זו עלולה להיות מתישה ביותר, בלתי סבירה עבור עולם דיון גדול, ואף בלתי אפשרית עבור עולם דיון אינסופי. בדרך-כלל, אם כן, יש למצוא דרך כללית להוכחה.

מציאת דרך טובה להוכחת טענת הכללה עלולה להיות משימה קשה. ישנן טכניקות שונות, שמתאימות למקרים שונים. לסוג נפוץ במיוחד של טענות הכללה, כאלו מהצורה $p\rightarrow q$ או מהצורה $p\leftrightarrow q$ נקדיש את סעיפים 0 ו- 11 (בהתאמה). במקרים מסוימים ניתן להשתמש בטכניקת הוכחה חשובה וידועה בשם **אינדוקציה**, שאותה לא נכסה במסגרת קורס זה. ככלל, אין שיטה אחת או מתכון לבחירת השיטה המתאימה, ולכן יש חשיבות גדולה לרכישת ניסיון ומיומנות בטכניקות הוכחה שונות.

כאמור נדון בהוכחות טענות הכללה בסעיפים הבאים, אבל זהו המקום להזכיר טעות נפוצה: "הוכחת" טענת הכללה באמצעות דוגמה. למשל, דרך שגויה להוכיח כי לכל x טבעי $x\leq x^2$ תהיה להראות כי התכונה מתקיימת ע"י למשל המספר הטבעי 3. כמובן, אין בכך משום הוכחת הטענה, כיוון שהטענה גורסת שהתכונה הנ"ל מתקיימת לכל מספר טבעי.

9.3. הוכחת טענות קיום

כדי להוכיח טענת קיום עלינו להראות כי לפחות אלמנט אחד מעולם הדיון מקיים את התכונה הרצויה. תיאורטית, אם עולם הדיון סופי יש באפשרותנו לעבור על כל האלמנטים שבו אחד-אחד ולמצוא איבר כנדרש. גם כאן השיטה הזו אינה מעשית ברוב המקרים, וצריך למצוא דרך כללית להוכחת הטענה.

הוכחות לטענות קיום נחלקות לשני סוגים: הוכחות קיום ע"י בנייה (קונסטרוקטיביות) וללא בנייה (לא קונסטרוקטיביות). בהוכחות מהסוג הראשון אנו מראים כי קיים אלמנט כנדרש, ע"י הצגת האלמנט עצמו או דרך כלשהי למצוא אותו, ואילו בהוכחות מהסוג השני אנו מוכיחים כי קיים אלמנט כנדרש באופן עקיף, מבלי להראות אותו או דרך למצוא אותו. נדגים את שני סוגי ההוכחות.

9.3.1. הוכחת קיום ע"י בנייה

דוגמה:

טענה: לכל 3 שלמים עוקבים קיים מספר שחלוקתו בשלושתם נותנת שארית 1.

הוכחה: נסמן את שלושת המספרים העוקבים ב- n, $n+1$, $n+2$. המספר $n(n+1)(n+2)+1$ מקיים את הנדרש.

בדוגמה הזו הראינו לא רק שקיים מספר שמקיים את התכונה הדרושה, אלא גם הצגנו את המספר עצמו (חלוקת המספר $n(n+1)(n+2)+1$ ב- n נותנת שארית 1, וכך גם חלוקתו של מספר זה ב- $n+1$ וב- $n+2$).

הערה: אולי התעוררה אצלכם השאלה (המטרידה) כיצד יכולתם להגיע לפתרון הזה בכוחות עצמכם? זו אכן שאלה שראויה להתייחסות, אך שימו לב שזו כלל אינה הנקודה כאן. אנו עוסקים בהצגת טכניקות הוכחה שונות באמצעות דוגמאות ולא בדוגמאות עצמן.

9.3.2. הוכחת קיום ללא בנייה

הדוגמה הזו תהיה קלה יותר להבנה למי שלמד מעט חשבון דיפרנציאלי, אולם גם מי שלא בקיא בפרטים יוכל להבין אותה:

טענה: למשוואה $y = x^3-8x+3$ יש לפחות שורש ממשי אחד.

הוכחה: נשתמש במשפט מתחום אחר במתמטיקה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) שלפיו אם לפונקציה רציפה יש שתי נקודות שבאחת ערכה חיובי ובאחרת שלילי, אז יש נקודה בין שתיהן בה הפונקציה מתאפסת.

במקרה שלנו: $y(0) = 3 > 0$

$y(1) = -4 < 0$

מכיוון שהפונקציה רציפה (יש להוכיח זאת, אבל נוותר על זה כאן) אז קיים $0<x_0<1$ כך ש- $y(x_0)=0$.

תחילה, נעיר שהשתמשנו כאן במשפט שאת הוכחתו לא הבאנו. כאמור בפתיח לחלק השני, הדבר מקובל ביותר במתמטיקה, ואין בכך פגיעה בתקפות ההוכחה. שנית נעיר, כי דילגנו על הוכחת רציפותה של הפונקציה שבדוגמה, משום שזה לא העיקר בדוגמה הזו, ונושא הרציפות נלמד לעומק בקורסים אחרים. הנקודה המרכזית כאן היא שהוכחנו קיום של שורש ממשי מבלי להראות שורש כזה, ואף מבלי להראות דרך לפתור את המשוואה כדי למצוא שורש כזה. הראינו את קיומו באופן עקיף.

9.4. הפרכת טענות הכללה וטענות קיום

הפרכת טענת הכללה מתבססת על השקילות אותה ראינו בסעיף 7.3:

$$\neg\forall x\, P(x) \;\equiv\; \exists x\, \neg P(x)$$

כלומר עלינו להראות כי קיים x שלא מקיים את התכונה $P(x)$. x כזה נקרא **דוגמה נגדית** (counter example). שימו לב שמספיקה דוגמה נגדית **אחת** כדי להפריך טענת הכללה. למשל, כדי להפריך את הטענה "כל הנמרים סגולים", עלינו להוכיח כי "קיים נמר שאינו סגול", כלומר להביא דוגמה נגדית של נמר שאינו סגול (למרבה המזל מספיק להראות כי קיים נמר אחד כזה).

נראה עוד דוגמה:

טענה: לכל n שלם חיובי מתקיים $n^2 < 2^n$.
הפרכה: עבור n=3 הטענה לא נכונה, ולכן זו דוגמה נגדית, והטענה לא נכונה לכל n שלם חיובי.
הערה: גם עבור n=4 הטענה אינה מתקיימת, אבל כאמור מספיקה דוגמה נגדית אחת. האם יש דוגמאות נגדיות נוספות מלבד n=3 ו- n=4?

באופן דומה, הפרכת טענת קיום מתבססת על השקילות השנייה אותה ראינו בסעיף 7.3:

$$\neg\exists x\, P(x) \;\equiv\; \forall x\, \neg P(x)$$

כלומר עלינו להראות כי לכל x לא מתקיימת התכונה $P(x)$, או במילים אחרות התכונה לא מתקיימת לשום x. למעשה, מדובר כאן בהוכחת טענת הכללה עם התכונה ההפוכה לתכונה המקורית $P(x)$.

הטבלה הבאה מסכמת את האמור לגבי הוכחת טענות עם כמתים:

$\neg\forall x\, P(x)$ מספיקה דוגמה נגדית אחת x מעולם הדיון עבורה מתקיים $P(x) \equiv F$	$\forall x\, P(x)$ יש להוכיח שכל האיברים בעולם הדיון מקיימים $P(x)$=T.
$\neg\exists x\, P(x)$ יש להוכיח שכל האיברים בעולם הדיון מקיימים $P(x)$=F.	$\exists x\, P(x)$ מספיקה דוגמה אחת x מעולם הדיון עבורה מתקיים $P(x) \equiv T$.

טבלה 11: הוכחת טענות עם כמתים

10. הוכחה והפרכה של טענות הכללה מהצורה $p\rightarrow q$

כאמור, רבות מהטענות במתמטיקה מנוסחות כטענות הכללה מהצורה "אם... אז...". ישנן מספר טכניקות להוכחת טענות כאלו, אותן נכיר כעת. בחירת הטכניקה המתאימה לכל מקרה היא עניין של מיומנות וניסיון.

10.1. הוכחה ישירה

דרך ההוכחה הישירה כשמה כן היא: מוכיחים ש- $p\rightarrow q$ הוא פסוק אמת ע"י כך שמניחים ש- p הוא פסוק אמת, ומוכיחים שבתנאים אלו גם q אמת. שימו לב שלא מוכיחים כלל ש- p הוא אמת! מוכיחים רק ש**אם** p הוא אמת, אז גם q אמת. במקרים שבהם p שקרי כלל אין צורך לטפל, שכן אז בודאי שהפסוק $p\rightarrow q$ הוא אמת, כפי שראינו קודם.

נדגים את דרך ההוכחה הישירה:

טענה: לכל n אם n מספר זוגי אז n^2 מספר זוגי.

הוכחה: נניח כי n מספר זוגי, ונוכיח כי בתנאים אלו גם n^2 מספר זוגי.

כיוון ש- n זוגי, לפי הגדרה הוא שווה למכפלת איזשהו מספר שלם ב- 2, כלומר: $n = 2k$ עבור איזשהו k שלם. ולכן $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. הראינו שניתן לכתוב את n^2 ככפולה של מספר שלם ב- 2 (שימו לב שהמספר $2k^2$ הוא שלם כי המספר k הוא שלם), ולכן לפי הגדרה n^2 זוגי.

את ההוכחה הזו ניתן היה גם לכתוב באופן מסודר יותר, כרשימת טענות, שכל אחת היא הנחה או שהיא נובעת מקודמותיה ומהגדרות ידועות:

הוכחה:

טענה	נימוק
1. n זוגי	הנחה
2. $n = 2k$ ו- k איזשהו שלם	טענה 1, הגדרת מספר זוגי
3. $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$	טענה 2
4. $2k^2$ שלם	טענה 2
5. n^2 זוגי	טענות 3,4 , הגדרת מספר זוגי

בשורה הראשונה אנו מניחים כי n זוגי, ובשורה האחרונה הגענו למסקנה כי n^2 זוגי.

10.2. הוכחה עקיפה

נתבונן בטענה: "לכל n אם n^2 מספר זוגי אז n מספר זוגי". אם ננסה להוכיח טענה זו בדרך הישירה שהוצגה לעיל, ניתקל בקשיים. תחילת ההוכחה ייראה כך:

טענה	נימוק
1. n^2 זוגי	הנחה
2. $n^2 = 2k$ ו- k איזשהו שלם	טענה 1, הגדרת מספר זוגי
3. $n = \sqrt{2k}$	טענה 2
???	

אחרי שורה 3 קשה יהיה להמשיך ולהגיע למסקנה הרצויה. הוכחה עקיפה עושה שימוש בשקילות 1 מסעיף 5:

$$p \rightarrow q \ \equiv \ (\neg q) \rightarrow (\neg p)$$

ובמקום להניח את p ולהוכיח את q, אנו נניח דווקא את שלילתו של q ונוכיח את שלילתו של p.
מכיוון ששני הפסוקים הנ"ל שקולים, יש בהוכחה זו משום הוכחת הטענה בצורתה המקורית.

נראה אם כן כיצד אפשר להוכיח בקלות את הטענה הקודמת, בדרך עקיפה. במקרה שלנו:

$p =$ " n^2 מספר זוגי "

$q =$ " n מספר זוגי "

ולכן הנחתנו תהיה ש- n **אינו** מספר זוגי, ומכך ננסה להוכיח כי n^2 **אינו** מספר זוגי:

טענה: לכל n אם n^2 מספר זוגי אז n מספר זוגי.

הוכחה:

טענה	נימוק
1. n אי-זוגי	הנחה
2. $n = 2k+1$ ו- k איזשהו שלם	טענה 1, הגדרת מספר אי-זוגי
3. $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$	טענה 2
4. $2k^2+2k$ שלם	טענה 2
5. n^2 אי-זוגי	טענות 3,4 , הגדרת מספר אי-זוגי

הוכחה עקיפה שימושית, אם כן, בעיקר כאשר ההוכחה הישירה מסורבלת או בלתי אפשרית.

10.3. טענה שנכונה באופן ריק

טענה מהצורה $p \rightarrow q$ כאשר p הוא פסוק שקר מכונה טענה **שנכונה באופן ריק** (או טענה שנכונותה מתקיימת באופן ריק). בד"כ ניתקל בטענות כאלו כחלק מהוכחה "גדולה" יותר, או כמקרה מסוים מבין מספר מקרים אפשריים. לדוגמה, הטענה "עבור n טבעי, אם n שלילי אז n+1 זוגי" היא טענה שנכונה באופן ריק, שכן התנאי "אם n שלילי" לעולם אינו מתקיים עבור מספרים טבעיים. דוגמה נוספת לכך היא הטענה "עבור m ו- n טבעיים אם $n<m$ אז $n^2<m^2$". במקרה שבו m=0 הטענה נכונה באופן ריק שכן אין אף מספר טבעי שקטן מ-0, ולכן התנאי אם $n<m$ לעולם אינו מתקיים.

10.4. טענה שנכונה באופן טריוויאלי

טענה מהצורה $p \rightarrow q$ כאשר q הוא פסוק אמת מכונה טענה **שנכונה באופן טריוויאלי** (או טענה שנכונותה מתקיימת באופן טריוויאלי). גם בטענות כאלו בד"כ ניתקל כחלק מהוכחה "גדולה" יותר. לדוגמה, הטענה "עבור n טבעי, אם n ראשוני אז $2n$ זוגי" היא טענה שנכונה באופן ריק, שכן המסקנה "אז $2n$ זוגי" מתקיימת לכל מספר טבעי (ללא קשר לראשוניותו). דוגמה נוספת לכך היא הטענה " עבור x,y ממשיים אם $xy=0$ אז $(x+y)^n = x^n + y^n$ לכל n שלם חיובי". במקרה שבו n=1 הטענה נכונה באופן טריוויאלי (בלי קשר לתנאי xy=0).

10.5. הוכחת טענות הכללה מהצורה $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$

היזכרו בשקילות 2 מסעיף 5:

$$(p \vee q) \rightarrow r \;\equiv\; (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

שקילות זו מספקת לנו דרך להוכיח טענות מהצורה שבכותרת הסעיף. למשל, כדי להוכיח את הטענה "אם אדם רעב או צמא אז הוא עצבני" מוכיחים ע"י כך שמראים שאדם רעב הוא עצבני, וכמו כן שאדם צמא הוא עצבני.

הוכחה כזו מכונה **הוכחה לפי מקרים** או הוכחה בחלקים. היא שימושית ביותר כאשר אנו נדרשים להוכיח טענה מהצורה $p \rightarrow q$, וניתן להפריד את תנאי הגרירה לתתי תנאים, כלומר $p \equiv p_1 \vee p_2$. אז נוכל להוכיח בנפרד ש- $(p_1 \rightarrow q)$ וש- $(p_2 \rightarrow q)$. כמובן, ניתן להכליל את השקילות הזו למספר תתי תנאים שגדול מ- 2, כלומר, לכל n שלם חיובי:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow r \quad \equiv \quad (p_1 \rightarrow r) \wedge (p_2 \rightarrow r) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow r)$$

דוגמה נוספת:

טענה: לכל n שלם, אם n אינו ניתן לחלוקה ב-3 אז שארית החלוקה של n^2 ב-3 היא 1.

הוכחה: שארית החלוקה של מספר ב- 3 יכולה להיות 0, 1 או 2. לפיכך, ניתן להפריד את התנאי "n אינו ניתן לחלוקה ב-3" לשני תתי תנאים, ולהשתמש בהוכחה לפי מקרים:

- מקרה 1: שארית החלוקה של n ב- 3 היא 1
- מקרה 2: שארית החלוקה של n ב- 3 היא 2

<u>מקרה 1</u>: נוכיח שאם שארית החלוקה של n ב- 3 היא 1 אז שארית החלוקה של n^2 ב-3 היא 1.

<u>טענה</u>	<u>נימוק</u>
1. נניח ששארית החלוקה של n ב- 3 היא 1	הנחה
2. $n = 3k+1$ ו- k איזשהו שלם	טענה 1
3. $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$	טענה 2
4. $3k^2 + 2k$ שלם	טענה 2
5. שארית החלוקה של n^2 ב-3 היא 1	טענות 3,4

<u>מקרה 2</u>: נוכיח שאם שארית החלוקה של n ב- 3 היא 1 אז שארית החלוקה של n^2 ב-3 היא 1.

<u>טענה</u>	<u>נימוק</u>
1. נניח ששארית החלוקה של n ב- 3 היא 2	הנחה
2. $n = 3k+2$ ו- k איזשהו שלם	טענה 1
3. $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k+1) + 1$	טענה 2
4. $3k^2 + 4k+1$ שלם	טענה 2
5. שארית החלוקה של n^2 ב-3 היא 1	טענות 3,4

10.6. הפרכת טענות הכללה מהצורה $p\rightarrow q$

כיצד מוכיחים שטענת גרירה **אינה** נכונה (כלומר מפריכים אותה)? לעזרנו תבוא השקילות שראינו בסעיף 7.3:

$$\neg(p\rightarrow q) \equiv p\wedge\neg q$$

כפי שצוין בסעיף 9.4 מספיקה דוגמה נגדית אחת כדי להפריך טענת הכללה. לפיכך, כדי להפריך טענת הכללה מהצורה $p\rightarrow q$ צריך להראות דוגמה נגדית לטענה זו, כלומר דוגמה שעבורה הטענה ההפוכה $p\wedge\neg q$ היא אמת. לדוגמה:

טענה: לכל n אם n^2 אי-זוגי אז n ראשוני.
הפרכה: נראה דוגמה למספר n המקיים: n^2 אי-זוגי וגם n **לא** ראשוני.
מספר כזה הוא למשל n=9. מתקיים ש- 9^2=81 אי-זוגי, וגם 9 לא ראשוני.

לעיתים משתמשים במילה **אֲבָל** במקום המילה וגם, כדי להדגיש את העובדה שהדוגמה משמשת כדוגמה נגדית לטענת הגרירה. במקום "9^2=81 אי-זוגי, וגם 9 לא ראשוני" נכתוב "9^2=81 אי-זוגי, אבל 9 לא ראשוני", כדי להבליט את הניגוד לטענה המקורית שאנו מפריכים.

11. הוכחה והפרכה של טענות הכללה מהצורה $p\leftrightarrow q$

הוכחת טענת הכללה מהצורה $p\leftrightarrow q$ משמעותה הוכחה ששני הפסוקים p ו- q הינם שקולים. הדבר מצריך הוכחת גרירה דו-כיוונית: יש להוכיח בנפרד כי $p\rightarrow q$ וכי $q\rightarrow p$. למשל, כדי להוכיח את הטענה "לכל n, המספר n אי-זוגי אם"ם n^2 אי-זוגי" יש להוכיח את שתי הטענות: "לכל n, אם המספר n אי-זוגי אז n^2 אי-זוגי" ו- " לכל n, אם n^2 אי-זוגי אז n אי-זוגי".

להפרכת טענות כנ"ל נוכיח שלפחות אחד משני כיווני הגרירה אינו מתקיים. בהתאם לשקילות מסעיף 7.4 נוכיח כי לפחות אחד מהפסוקים הבאים הוא פסוק אמת: $p\wedge\neg q$ או $q\wedge\neg p$.

לעיתים אנו נדרשים להוכיח כי יותר מ- 2 פסוקים שקולים זה לזה. משמעות הדבר היא שאם פסוק אחד מהם אמיתי אז כולם אמיתיים, ואם אחד שקרי אז כולם שקריים. למשל, הטענות הבאות כולן שקולות זו לזו: "היום יום זוגי", "היום יום שני, רביעי או שישי", "מחר יום שלישי, חמישי או שבת". שלוש הטענות האלו נכונות, או ששלושתן אינן נכונות (תלוי באיזה יום הן נאמרות), ולא ייתכן שאחת תהיה נכונה ואחרת לא. אם נסמן את שלוש הטענות באותיות p, q, r אז העובדה ששלושתן שקולות זו לזו משמעותה שהפסוק $p\leftrightarrow q\leftrightarrow r$ הוא אמת תמיד (מדוע לא צריך לשים סוגריים?).

תחילה, נברר כיצד מוכיחים ש- 3 טענות שקולות זו לזו, ואח"כ נכליל את המסקנה ל- n טענות. עבור 3 טענות p, q, r כדי להוכיח $p\leftrightarrow q\leftrightarrow r$ נוכיח כי $p\rightarrow q$ וגם $q\rightarrow r$ וגם $r\rightarrow p$. מדוע זה נכון? כי בכך הוכחנו שאם אחת הטענות נכונה (ולא משנה איזו), אז כולן נכונות, בגלל הגרירה מאחת לשנייה ומהשנייה לשלישית. ואילו אם אחת מהן אינה נכונה, אז כולן לא נכונות, שכן אילו אחת היתה נכונה, אז כאמור כולן היו נכונות. במילים אחרות, השתמשנו בשקילות:

$$p\leftrightarrow q\leftrightarrow r \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow p)$$

יש כאן מעין הוכחת "גרירה מעגלית".

דוגמה:

טענה: הראו כי הטענות הבאות שקולות:

p = "n הוא מספר זוגי"

q = "$n+1$ הוא מספר אי-זוגי"

r = "n^2 הוא מספר זוגי"

הוכחה: עלינו להוכיח כי: 1. אם n זוגי אז $n+1$ אי-זוגי.

2. אם $n+1$ אי-זוגי אז n^2 זוגי.

3. אם n^2 זוגי אז n זוגי.

נשאיר זאת כתרגיל לקורא.

לסיום סעיף זה, נכליל את האמור לעיל עבור n טענות:

$$(p_1\leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n) \equiv (p_1\rightarrow p_2)\wedge(p_2\rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge(p_n\rightarrow p_1)$$

12. הוכחה ע"י סתירה

טכניקה נפוצה במיוחד בהוכחות מתמטיות היא הוכחת טענה ע"י סתירה. הרעיון בהוכחות כאלו הוא להניח לכמה רגעים שהטענה אותה אנו מעוניינים להוכיח **אינה נכונה**, ולהגיע מהנחה זו למסקנה בלתי אפשרית כלשהי, מה שמכונה בלוגיקה בשם **סתירה**. הוכחה ע"י סתירה מתבססת על ההנחה הבסיסית שהוזכרה קודם (הנחה שעליה מושתתת הלוגיקה הקלאסית), לפיה פסוק חייב להיות אמיתי או שקרי. תחת הנחה זו, אם הראינו שלא ייתכן שפסוק מסוים הוא שקרי, כי הדבר מוביל למסקנה בלתי אפשרית, לא נותרה בידנו אלא הברירה להסיק שהפסוק הוא אמיתי. בטכניקה הזו משתמשים פעמים רבות עבור טענות שהוכחתן בדרך אחרת אינה אפשרית או מסורבלת.

הערה: הוכחה ע"י סתירה היא טכניקה שימושית הן עבור טענות קיום והן עבור טענות הכללה.

הוכחה ע"י סתירה פותחת בד"כ במילים "נניח בשלילה", שמשמעותן היא שאנו מניחים כי דווקא שלילתה של הטענה (שאנו רוצים להוכיח) היא אמת.

דוגמה:

טענה: בבחירה אקראית של 15 תאריכים, ישנו יום בשבוע שנבחר לפחות 3 פעמים. הוכחה: נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה. כלומר, בוחרים אקראית 15 תאריכים, אבל אף יום לא נבחר לפחות 3 פעמים. משמעות הדבר היא שכל אחד מימי השבוע נבחר לכל היותר פעמים. ומכאן שבסה"כ נבחרו לכל היותר 14 תאריכים. הדבר עומד בסתירה לנתון לפיו נבחרו 15 תאריכים. ההנחה בשלילה הולידה אם כן מסקנה שעומדת בסתירה לנתון, ולכן מסקנה זו, וכן ההנחה הנ"ל אינן אפשריות. הברירה היחידה היא להסיק אם כן שהטענה המקורית נכונה (כלומר קיים יום שנבחר לפחות 3 פעמים).

דוגמה נוספת:

טענה: למשוואה $x^2 - y^2 = 1$ אין פתרונות שלמים חיוביים.

הוכחה: נניח בשלילה הטענה אינה נכונה. כלומר, ישנו למשוואה פתרון (x_0,y_0) כאשר x_0 ו- y_0 שלמים חיוביים.

כלומר: $x_0^2 - y_0^2 = 1$

מכאן ש- $(x_0+y_0)(x_0-y_0) = 1$

מכיוון ש- x_0 ו- y_0 שלמים חיוביים, מתקיים ש- (x_0+y_0) ו- (x_0-y_0) שווים שניהם ל- 1 או שניהם ל- 1- (רק כך מכפלתם תהיה שווה ל- 1).

שתי האפשרויות לא ייתכנו כי x_0 ו- y_0 שלמים חיוביים ולכן סכומם חייב להיות לפחות 2.

מכיוון שהגענו למסקנה שאינה אפשרית, אין ברירה אלא לזנוח את ההנחה בה פתחנו, ולהסיק כי הטענה המקורית דווקא כן נכונה.

ניתן להוכיח ע"י סתירה גם טענות הכללה מהצורה $p \rightarrow q$ בהן עסקנו בסעיף 0. ההוכחה, במקרה כזה, תדמה מאוד להוכחה עקיפה, כפי שהוצגה בסעיף 10.2. למשל, נדגים הוכחה ע"י סתירה לטענה שהוצגה שם:

טענה: לכל n אם n^2 מספר זוגי אז n מספר זוגי.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. כלומר לא נכון שלכל n מתקיימת התכונה שלעיל.
כלומר, קיים n כזה שעבורו n^2 מספר זוגי **אבל** n מספר אי-זוגי. כעת:

טענה	נימוק
1. n אי-זוגי	הנחה
2. $n = 2k+1$ ו- k איזשהו שלם	טענה 1, הגדרת מספר אי-זוגי
3. $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1= 2(2k^2+2k)+1$	טענה 2
4. $2k^2+2k$ שלם	טענה 2
5. n^2 אי-זוגי	טענות 3,4 , הגדרת מספר אי-זוגי

קיבלנו ש- n^2 אי-זוגי וזו סתירה להנחה הטוענת בין השאר כי n^2 זוגי. מכאן שההנחה בשלילה היתה שגויה, והטענה המקורית נכונה.

למעשה הוספנו להוכחה בדרך העקיפה משפטי פתיח ומשפטי סיום, שהופכים אותה להוכחה ע"י סתירה.

אחת הנקודות העדינות בשיטת ההוכחה ע"י סתירה היא ניסוח שלילתה של הטענה אותה רוצים להוכיח. לפעמים הדבר מבלבל ולא פשוט. בסעיף 7 ניסחנו חוקי שלילה שימושיים שיכולים לעזור במשימה זו. למשל, נסו לחשוב מהי שלילתה של הטענה הבאה: "לכל אזרח יש תעודת זהות יחידה או שהוא זייפן תעודות זהות".

התשובה: "קיים אזרח שאין לו תעודת זהות כלל, או שיש לו יותר משתיים כאלו, וגם אזרח זה אינו זייפן תעודות זהות".

תרגילים

שאלה 1

האם צריך לשים סוגריים בפסוק מהצורה $a \wedge b \vee c$?

במילים אחרות, האם $a \wedge (b \vee c) \not\equiv (a \wedge b) \vee c$ או שבשני האגפים יש פסוקים שקולים ואפשר לוותר על הסוגריים?

כיצד תוכיחו את קביעתכם?

שאלה 2

להלן מספר טענות. סמנו עבור כל אחת אם היא פסוק אמת או פסוק שקר.

א. אם 1+1=2 אז היום יום שני. T / F

ב. אם 1+1=2 אז היום יום שלישי. T / F

ג. אם 1+1=3 אז היום יום שני. T / F

ד. אם 1+1=3 אז היום יום שלישי. T / F

שאלה 3

פעמים רבות עולה הצורך להוכיח שפסוק כלשהו מהצורה $q \to p$ <u>אינו נכון</u>, כלומר שהוא <u>פסוק שקר</u>.

א. <u>הקיפו בעיגול</u>: לשם כך עלינו להראות כי p הוא <u>אמת/שקר</u> ואילו q הוא <u>אמת/שקר</u>.

ב. נוכיח כעת את השקילות הלוגית הבאה: $\neg(p \to q) \;\equiv\; p \wedge \neg q$

תחילה, ודאו שאתם מבינים את הקשר בין תשובתכם לסעיף א' לבין השקילות הלוגית הנ"ל.

השלימו את טבלת האמת הבאה כדי להוכיח את השקילות הנ"ל:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$ (שמאל)	$\neg q$	$p \wedge \neg q$ (ימין)
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

כיצד נוכיח שפסוק כלשהו מהצורה $q \to p$ הוא <u>נכון</u>, כלומר שהוא <u>פסוק אמת</u>?

ג. לשם כך ניעזר בשקילות $p \to q \;\equiv\; \neg p \vee q$.

נוכיח כעת את השקילות הזו. אפשר כמובן לעשות זאת בעזרת טבלת שייכות. במקום זאת, נסו להוכיח את השקילות הזו בעזרת השקילות מסעיף ב' וכללי דה-מורגן.

<u>שאלה 4</u>

נסתכל על המשפט הבא: "תקבל רישיון נהיגה רק לאחר גיל 17 ובתנאי שלא תיכשל במבחן נהיגה".

נסמן: P – תקבל רישיון נהיגה

R – עברת את גיל 17

F – נכשלת במבחן נהיגה

אילו מבין הבאים מהווה הצרנה לוגית של המשפט הנתון (ייתכנו כמה תשובות)?

א. $P \rightarrow (R \wedge \neg F)$

ב. $(R \wedge \neg F) \rightarrow P$

ג. $\neg P \rightarrow \neg(R \wedge \neg F)$

ד. $\neg\,(R \wedge \neg F) \rightarrow \neg P$

ה. $\neg R \vee F \rightarrow \neg P$

<u>שאלה 5</u>

נסמן: $P(x)$ – x דובר צרפתית

מה הפירוש של: $\exists x\,[P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y))\,]$?

תנו דוגמה לעולם דיון בו פסוק זה הוא אמת, ולעולם דיון בו הוא פסוק שקר.

<u>שאלה 6</u>

לכל אחד משני הפסוקים הבאים, האם הוא אמת או שקר (עולם הדיון הוא המספרים הממשיים) ? הוכיחו.

א. $\exists y\ \forall x\ \ x+y=0$

ב. $\forall x\ \exists y\ \ x+y=0$

<u>שאלה 7</u>

הוכיחו כי בהינתן סדרת מספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ לפחות אחד מהם גדול או שווה לממוצע שלהם.

השתמשו בטכניקת ההוכחה ע"י סתירה.

<u>שאלה 8</u>

הוכיחו כי לכל n מתקיים ש- n זוגי אם"ם n^3 זוגי.

<u>שאלה 9</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: לכל שני מספרים שלמים חיוביים, אם אף אחד מהם לא מתחלק ב-3 ללא שארית, אז גם סכומם לא מתחלק ב- 3 ללא שארית.

<u>שאלה 10</u>

הוכיחו כי הטענות הבאות שקולות זו לזו, לכל n:

1. n זוגי
2. $3n+1$ אי-זוגי
3. $3n$ זוגי

<u>שאלה 11</u>

עבור סדרת מספרים באורך n: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, נאמר שהסדרה היא **מקסימלית זוגית** אם היא מקיימת את התנאי הבא:

אם $a_i > a_{i+1}$ וגם $a_i > a_{i-1}$ (עבור i כלשהו, $2 \leq i \leq n-1$) אז a_i זוגי.

א. הראו סדרה באורך n שהיא מקסימלית זוגית באופן ריק.

ב. הראו סדרה באורך n שהיא מקסימלית זוגית באופן טריוויאלי.

ג. הוכיחו או הפריכו: לכל סדרה מקסימלית זוגית קיימת סדרה עם אותם איברים שאינה מקסימלית זוגית.

פתרונות לתרגילים

שאלה 4

פתרון:

כזכור, הפסוק $p \to q$ אינו שקול לפסוק $q \to p$, ואילו הפסוק $p \to q$ שקול לפסוק $\neg q \to \neg p$.

מכאן ש- א' ו- ד' שקולים, וכמו כן ב' ו- ג' שקולים. אבל א' ו- ד' אינם שקולים ל- ב' ו- ג'.

א' היא תשובה אחת נכונה, שכן אם אדם קיבל רישיון נהיגה, אז מכך נובע שהוא עבר את גיל 17 וכן לא נכשל במבחן הנהיגה (שכן אילו אחד משני התנאים הנ"ל לא היה מתקיים, אז לא ייתכן שקיבל רישיון). תשובה ב' לא נכונה, כי ייתכן שאדם עבר את גיל 17 וגם לא נכשל במבחן הנהיגה, אבל עדיין לא קיבל רישיון מסיבה אחרת (אולי ישנם תנאים נוספים לקבלת רישיון, כמו למשל לשלם את האגרה). תשובה ג' אינו נכונה, שכן היא שקולה לתשובה ב'. תשובה ד' נכונה, שכן היא שקולה לתשובה א'. גם תשובה ה' נכונה, כי היא שקולה לתשובות א' ו- ד'. ניתן לראות זאת בעזרת חוקי דה מורגן וחוקי השלילה הכפולה:

- הפסוק $\neg(p \wedge q)$ שקול פסוק $\neg p \vee \neg q$
- הפסוק $\neg\neg p$ שקול לפסוק p.

ומכאן: $\neg\,(R(x) \wedge \neg F(x))$ שקול ל- $\neg R(x) \vee \neg\neg F(x)$ ששקול ל- $\neg R(x) \vee F(x)$

שאלה 5

פתרון:

קיים אדם דובר צרפתית, וגם כל מי ששונה ממנו (בעולם הדיון) אינו דובר צרפתית. במילים אחרות: ***קיים דובר צרפתית יחיד.***

בעולם דיון שכולל את תושבי אירופה, זהו בודאי פסוק שקר. בעולם דיון שכולל את כיתת הקורס צרפתית למתחילים הפסוק אמת, כי רק המורה דוברת את השפה (בהנחה שלא הסתנן לשם צרפתי כלשהו).

שאלה 6

פתרון:

א׳ שקר - זה לא נכון שקיים y שלכל x מקיים $x+y=0$. נניח בשלילה שקיים y כזה, אז עבור $x_1 \neq x_2$ כלשהם מתקיים $x_1+y=0$ וגם $x_2+y=0$. מכאן נובע ש- $y \neq y$, וזו סתירה, לכן ההנחה בשלילה שגויה ולא קיים y כזה.

ב׳ אמת – הוכחת קיום (קונסטרוקטיבית): יהי x ממשי כלשהי. אז $y = -x$ מקיים את הנדרש.

שאלה 11

פתרון:

א – למשל סדרה מונוטונית עולה (או יורדת). דוגמה לסדרה כזו: $(1,2,3,\ldots,n)$ או בכתיבה אחרת: $a_i=i$. סדרה כזו לא מקיימת עבור שום i את ההנחה שבתנאי ("אם..."), כי אין אף איבר שגדול משני שכניו. לכן הסדרה הזו מקיימת את התנאי למקסימליות זוגית באופן ריק.

ב – למשל סדרה שכל איבריה זוגיים. דוגמה לסדרה כזו: $a_i=2$ (כל איברי הסדרה הם 2). סדרה כזו מקיימת תמיד את המסקנה של התנאי ("אז..."), כי כל איברים מספרים זוגיים. לכן היא מקיימת את התנאי למקסימליות זוגית באופן טריוויאלי.

ג – טענה לא נכונה. נפריך ע"י דוגמה נגדית: סדרה שכל איבריה זוגיים. כל סידור של איברי סדרה כזו יניב סדרה מקסימלית זוגית, לפי המוסבר בסעיף ב'.

מקורות

1. Discrete Mathematics, Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, 4th edition
2. Discrete Mathematics and its Applications, Kenneth H Rosen
3. מתמטיקה דיסקרטית, האוניברסיטה הפתוחה, 1993, כרך III – לוגיקה מתמטית
4. מתמטיקה בדידה, נתי ליניאל ומיכל פרנס, 2005