02.09.07

סמסטר ב', תשס"ז
מועד ב'

מבחן ב"ניתוח אלגוריתמים"
(מרצה : פרופ' א. צוויק)

משך המבחן : 3½ שעות (**לא תינתן הארכה נוספת**).
השימוש בכל חומר עזר **אסור.** מותר להסתמך על כל התוצאות שתוארו בכיתה, אלא אם כן התבקשתם במפורש להציג ולהוכיח תוצאות שהובאו בכיתה.

ענה/י על ארבע שאלות **(בלבד)** מתוך חמש השאלות הבאות. משקל כל השאלות שווה.
ציין/י בתחילת המחברת באופן **ברור** מי הן ארבעת השאלות שבחרת.

שאלה 1

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר עם פונקצית משקל $w: E \to \Re$ המוגדרת על קשתותיו. (משקלי הקשתות לאו דווקא שונים זה מזה.) יהא T עץ פורש מינימאלי של G ותהא e קשת של T. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא בכמה ניתן להגדיל את $w(e)$ כך ש-T יהיה עדיין עץ פורש מינימאלי.

שאלה 2

מריצים חזרה אחת של אלגוריתם הכיווץ המקרי של Karger ו-Stein למציאת חתך מינימום גלובלי על גרף $G=(V,E)$ שמורכב מקליק על הצמתים $1,2,\ldots,n\text{-}1$ ומהקשת $(n\text{-}1,n)$. מה ההסתברות שהחתך המוחזר הוא חתך מינימום גלובלי של G? מספיק למצוא את סדר הגודל של ההסתברות המבוקשת. (ניתן להיעזר בהערכה $\prod(1-\alpha_i) \approx e^{-\sum \alpha_i}$.)

שאלה 3

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקצית אורך $\ell: E \to \Re$ המוגדרת על קשתותיו. תאר/י אלגוריתם פולינומיאלי חזק, יעיל ככל האפשר, למציאת מעגל בעל ממוצע משקלים קטן ככל האפשר.

<u>שאלה 4</u>

תהא $N=(G,a,c,s,t)$ רשת זרימה עם פונקצית מחיר $a:E\to\Re$ ופונקצית קיבול $c:E\to\Re$. תהא $f:E\to\Re^{+}$ זרימה ב- N. הראה/י ש- f היא זרימה במחיר מינימאלי אם קיימת פונקצית פוטנציאל $\pi:V\to\Re$ שעבורה מתקיים:

1) אם $a_{\pi}(e)>0$ אז $f(e)=0$.
2) אם $0<f(e)<c(e)$ אז $a_{\pi}(e)=0$.
3) אם $a_{\pi}(e)<0$ אז $f(e)=c(e)$.

כאשר אם $e=(u,v)\in E$ אז $a_{\pi}(e)=a(e)+\pi(u)-\pi(v)$.

<u>שאלה 5</u>

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. יהא M שידוך ב- G **שאינו** שידוך מקסימום. יהא r צומת שאינו משודך ע"י M. הוכח/י או הפרך/י:

א. אם M' הוא שידוך עבורו $|M|\geq|M'|$ אז קיימים לפחות $|M|-|M'|$ מסלולי שיפור זרים בצמתים ביחס ל-M.
ב. אם קיים שידוך מקסימום M^* שבו r משודך אז קיים מסלול הוספה ביחס ל-M שמתחיל ב-r.
ג. אם אין מסלול הוספה ביחס ל- M שמתחיל ב- r, אז קיים שידוך מקסימום M^* שבו r אינו משודך.

בהצלחה !!!