

מבחן ב' ניתוח אלגוריתמים
(מרצה : פרופ' א. צויק)

משך המבחן : $3\frac{1}{2}$ שעות (**לא תינתן הארכה נוספת**). השימוש בכל חומר עזר **אסור**. מותר להסתמך על כל התוצאות שתוארו בכיתה, אלא אם כן התבקשתם במפורש להציג ולהוכיח תוצאות שהובאו בכיתה.

ענה/י על ארבע שאלות (**בלבד**) מתוך חמש השאלות הבאות. משקל כל השאלות שווה. ציין/י בתחילת המחברת באופן ברור מי הן ארבעת השאלות שבחרת.

שאלה 1

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר עם פונקצית משקל $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על קשתותיו. (משקלי הקשתות לאו דווקא שונים זה מזה). תאר/י אלגוריתם (דטרמיניסטי או הסתברותי) יעיל ככל האפשר למציאת כל הקשתות שמשתתפות באיזשהו עץ פורש מינימלי של G .

שאלה 2

א. תאר/י במדויק את אלגוריתם הכיווץ המקרי של Stein ו-Karger למציאת חתך מינימום גלובלי בגרף לא מכוון ולא ממושקל. נתח/י את סיכויי ההצלחה של האלגוריתם. (הכוונה כאן לאלגוריתם הפשוט שהוצג בכיתה, לא לאלגוריתם המתוחכם והיעיל יותר).

3-חתך של גרף $G=(V,E)$ הוא חלוקה של צמתי G לשלוש קבוצות זרות A, B, C . גודל החתך שמוגדר ע"י A, B, C הוא מספר הקשתות שמחברות שני צמתים שאינם באותה קבוצה.

ב. תאר/י אלגוריתם פולינומיאלי למציאת 3-חתך בעל מספר קשתות מינימאלי בגרף $G=(V,E)$. לאלגוריתם מותר לטעות, אך ההסתברות לטעות צריכה להיות קטנה מ- $1/3$. (מספיק לתאר אלגוריתם פשוט שרץ בזמן פולינומיאלי ולנתחו בצורה נכונה. אין צורך לקבל אלגוריתם יעיל ככל האפשר).

שאלה 3

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון עם פונקצית אורך $\ell: E \rightarrow \mathfrak{R}$ המוגדרת על קשתותיו. נתון שאין ב- G מעגלים שליליים, אך אורכי חלק מהקשתות יכול להיות שלילי. פונקצית פוטנציאל $\pi: V \rightarrow \mathfrak{R}$ תקרא פונקצית פוטנציאל פיזיבילית אם עבור כל קשת $(u,v) \in E$ מתקיים

$$\ell_{\pi}(u,v) = \ell(u,v) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0$$

יהיו $s,t \in V$. נתון שיש ב- G מסלול מכוון מ- s ל- t . הראה/י שאורך המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t ב- G שווה למקסימום של $\pi(t) - \pi(s)$ על פני כל פונקציות הפוטנציאל הפיזיביליות.

שאלה 4

תהא $N = (G, a, c, s, t)$ רשת זרימה עם פונקצית מחיר $a: E \rightarrow \mathfrak{R}$ ופונקצית קיבול $\mathfrak{R}: E \rightarrow \mathfrak{R}^+$. תהא $f: E \rightarrow \mathfrak{R}^+$ זרימה ב- N . הראה/י ש- f היא זרימה במחיר מינימאלי אם קיימת פונקצית פוטנציאל $\pi: V \rightarrow \mathfrak{R}$ שעבורה מתקיים:

$$(1) \text{ אם } a_{\pi}(e) > 0 \text{ אז } f(e) = 0.$$

$$(2) \text{ אם } 0 < f(e) < c(e) \text{ אז } a_{\pi}(e) = 0.$$

$$(3) \text{ אם } a_{\pi}(e) < 0 \text{ אז } f(e) = c(e).$$

$$\text{כאשר אם } e = (u,v) \in E \text{ אז } a_{\pi}(e) = a(e) + \pi(u) - \pi(v).$$

שאלה 5

יהא $G=(U,V,E)$ גרף דו-צדדי לא מכוון. יהיו M_1 ו- M_2 שני שידוכים ב- G . הוכח או הפרך: תמיד קיים שידוך מקסימום M שמשדך את כל צמתי U המשודכים ע"י M_1 וכן את כל צמתי V המשודכים ע"י M_2 .

מהצחה !!!