12.1.09

גאומטריה חישובית

נמשיך בבעיה שהצגנו בשיעור הקודם...

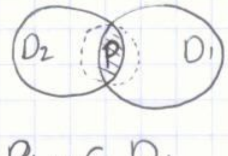
אלגוריתם רנדומי אינקרמנטלי -

נסדר את הנק' באופן אקראי $p_1,\dots,p_n$ ונחשב את העיגול החוסם המינימלי לאחר הוספת כל נקודה.

נסמן D_i כעיגול החוסם המינימלי לאחר הוספת i נקודות

הערה-

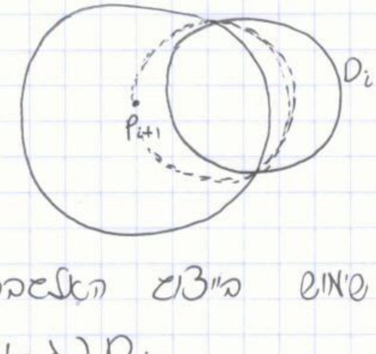
העיגול המינימלי הוא יחיד כי אם D_1, D_2 עיגולים חוסמים ו P הוא חיתוכם אז ניתן לבנות עיגול יותר קטן שקוטרו בין נקודות החיתוך.



בכל שלב, אם $p_{i+1} \in D_i$ אז $D_{i+1} = D_i$. אם $p_{i+1} \notin D_i$ אז $p_{i+1} \in \partial D_{i+1}$

הערה-

ניתן להראות הוכחה מסודרת לטענה הנ"ל ($p_{i+1} \in \partial D_{i+1}$). בכלליות, ניתן להסביר זאת ע"י לקיחת מעגל מינימלי שמכיל את הכל ו"דוחפים" עד שיגע ב p_{i+1} ואז להמשיך לפי ההערה הקודמת

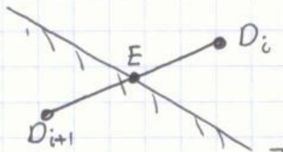


הסבר אלטרנטיבי ניתן למצוא ע"י שימוש בייצוג האלגברי במרחב x,y,z

$$E = \lambda D_i + (1-\lambda) D_{i+1}$$

$$F(E) \leq \lambda F(D_i) + (1-\lambda) F(D_{i+1}) \leq$$ (מקמירות)

$$\leq \max\left(F(D_i), F(D_{i+1}) \right) = F(D_{i+1})$$



$$z \le 2a_{i+1}x + 2b_{i+1}y - (a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)$$

כעת ניתן לתרגם את הבעיה שלנו לבעיה חדשה:
נתונה קבוצת נקודות ($P = P_i = \{p_1, \dots, p_i\}$) במישור ונקודה קבועה $q = p_{i+1}$. יש למצוא עיגול חוסם מינימלי של P ששפתו עוברת דרך q.

גם את בעיה זו נפתור ע"י אלגוריתם רנדומי אינקרמנטלי שמתחזק את העיגול המינימלי E_j החוסם את j הנקודות שהכנסנו עד כה וששפתו עוברת דרך q.

ושוב, אם $p_{j+1} \in E_j$ לא עושים כלום ואחרת, מתקיים $p_{j+1} \in \partial E_{j+1}$

נסמן $a, b = q, p_{j+1}$

אם p מצד ימין (שמאל) של a,b, טווח המרכזים של עיגולים שמכילים את p הוא קרן לכיוון ימין (שמאל)

נחשב את הקרניים, נבדוק שיש חיתוך ואם כן אז ניקח את המרכז שמביא את הרדיוס למינימום.

חישוב כזה הינו $O(n)$.

נסמן $T_0(n), T_1(n), T_2(n)$ כתוחלת הזמנים עם 0,1,2 נקודות על השפה. עבור T_2 דיינו $T_2(n) = O(n) \le C_2 n$

עבור T_1, קראנו לפרוצדורה עם 2 אילוצים או בכלל לא ולכן

$$T_1(n) = T_1(n-1) + \frac{2}{n} \cdot C_2 n + 1 = T_1(n-1) + (2C_2 + 1)$$

$$\Rightarrow T_1(n) \le C_1 n \equiv (2C_2 + 1) n$$

ובאותה דרך

$$T_0(n) = T_0(n-1) + \frac{3}{n} C_1 n + 1$$

$$\Rightarrow T_0(n) = O(n)$$

נחזור לדבר על חיתוך מרחבים ב R^d...

• נפעיל LP למצוא נק' בחיתוך o. נניח פנים שבו הראשית
(בה"כ זה נכון ע"י טרנספורמציית הזזה).

נפעיל דואליות ראשונה ואז

$p(a_0, a_1, a_2, \dots, a_d) \leftrightarrow p^*$ $\quad a_0 + a_1 X + a_2 X_2 + \dots + a_d X_d$

נק' p על שפת החיתוך $\rightarrow$ על מישור p^* שתומך בקמור של $h_1^*, \dots, h_n^*$

• ב 3 מימדים, כל פאה דו מימדית של הקמור דואלית לקודקוד של החיתוך
כל צלע דואלית לצלע
כל קודקוד דואלי לפאה של החיתוך

לכן, o קודקוד של הקמור אמ"מ החיתוך לא חסום

לכן, חיתוך הוא בעיית LP + בעיית קמור ולכן סיבוכיותו זהה
לזו של בעיית הקמור וזה נכון בכל מימד.

דיאגרמת וורוני (Voronoi):

מוטיבציה (בעיית סניפי הדואר) -

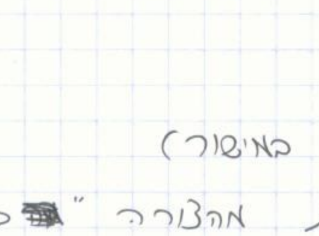
יש לנו קבוצה P של n סניפי דואר (נקודות במישור)

רוצים לעבד את P למבנה נתונים שיתמוך בשאלות מהצורה "בהנתן
נקודה x, מהי סניף הדואר הקרוב ביותר?"

דיאגרמת וורוני של P היא חלוקה של המישור לתחומים, כך שבכל
תחום סניף הדואר הקרוב ביותר הוא קבוע.

דוגמה -

• אם $P = \{a, b\}$ אז החלוקה היא האנך האמצעי של הקטע ab
• אם $P = \{a, b, c\}$ אז החלוקה היא שוב בעזרת אנכים אמצעיים



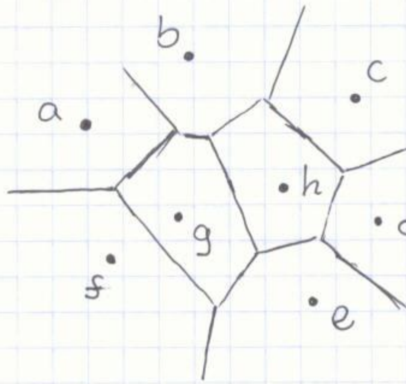
נקודות P נקראו אתרים (sites)

את תא הוורוני של אתר a נסמן ב V(a)

לקווים בדיאגרמה נקרא קשתות וורוני

נקודות המפגש של קשתות וורוני יקראו קודקודי וורוני

דוגמה -



נשים לב ש V(a) הוא חיתוך כל חצאי המישורים המכילים את a והמוגדרים ע"י האנכים האמצעיים בין a לבין כל אתר אחר. כלומר

$$V(a) = \{x : d(x,a) \le d(x,b) \ \forall b \in P\} =$$

$$= \bigcap_{b\in P} \{x : d(x,a) \le d(x,b)\}$$

אנו יודעים שכל התאים V(a) אינם ריקים כי לפחות $a \in V(a)$

אנו גם יודעים שכל התאים V(a) הם מצולעים קמורים (חסומים או לא) ושהם כוללים לכל היותר n-1 צלעות

כמו כן, ברור שכל התאים זרים בפנים ושאיחודם מכסים את כל המישור

לכן, דיאגרמת וורוני היא מפה מישורית עם בדיוק n פאות.

לפי נוסחת אוילר, אם דרגת כל קודקוד וורוני היא ≥ 3 אז

$$E \le 3n - 6$$

$$V \le 2n - 4$$

ואכן, קודקוד (סוף של קטע) ייווצר רק "מהופעת" נקודה נוספת (חוץ מנקודות הקצה של הקטע) לכן הדרגה ≥ 3

נרצה לבנות את הדיאגרמה בזמן $O(n\log n)$. קל לעשות זאת ב $O(n^2\log n)$ ע"י שימוש באלגוריתם שראינו לחיתוך חצאי מישורים

(חשבון $O(n\log n)$) וביצוע עבור כל אתר

נעבור לדבר על מצב כללי: * אין 4 אתרים על אותו מעגל

* אין 3 אתרים על אותו ישר

למה- תא וורונוי $V(a)$ אינו חסום אמ"מ a על שפת הקמור

הוכחה.

נניח ש a על שפת הקמור ונעביר ישר תומך l דרך a. נעביר קרן λ שיוצאת מ a החוצה ומאונכת ל l (הנורמל החיצוני של l ב a). λ לא חותכת אף קטע bc ולכן $V(a)$ אינו חסום.

להפך, נניח ש $V(a)$ אינו חסום. קיימת קרן λ שיוצאת מ a ומוכלת ב $V(a)$. נניח שהישר שמאונך ל λ ב a הוא l. אם יש נקודה $b\in P$ חיצונית ל l אז האנך האמצעי ל ab יחתוך את λ לפני a ולכן לא כל λ ב $V(a)$ בסתירה. לכן l תומך ב a ו a בקמור.

נסתכל על הייצוג האלגברי של הבעיה...

נתונים n אתרים $p_i=(a_i,b_i)$ ונקודת שאילתה (x,y).

נרצה למצוא את ה i שמביא $\min_i \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$

שורש לא משפיע על מינימום ולכן נעבור ל $\min_i[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2] =$

$$\min_i\{(x^2+y^2)-2a_ix-2b_iy+(a_i^2+b_i^2)\}$$

גם קבוע לא משפיע ולכן נעבור ל

$$\min_i[-2a_ix-2a_ib+(a_i^2+b_i^2)]$$

נגדיר $z \underset{''H_i(x,y)}{=} -2a_ix-2b_iy+a_i^2+b_i^2$ ונעבור ל $\min_i(z)$

למעשה, כעת אנו מחפשים את המעטפת התחתונה של המישורים הנ"ל, כלומר את השפה של החיתוך של חצאי המרחבים התחתונים ב $\mathbb{R}^3$ החסומים ע"י המישורים.

נקודה (x,y,z) שייכת למעטפת $\Leftrightarrow$ קיים i כך ש $z=H_i(x,y)$

ולכל $j\neq i$ $z\le H_j(x,y)$ $\Leftrightarrow$ נקודה (x,y,z) נמצאת בחיתוך של חצאי המרחבים ועל השפה של אחד מהם לפחות

לכן, ניתן לחשב את החיתוך ע"י קמור במרחב הדואלי בזמן $O(n\log n)$,
לתרגם את הקמור לחיתוך, ולתרגם את החיתוך לדיאגרמת וורוני.
המשמעות של התרגום היא
$Vor(P) \equiv$ ההטלה של המעטפת התחתונה (שפת החיתוך) על מישור x,y