29.12.08

גאומטריה חישובית

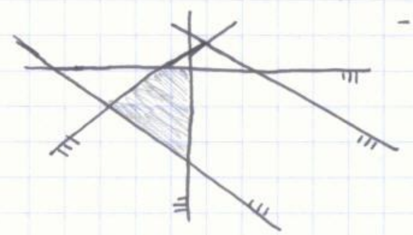
בעיות חיתוך ותכנון לינארי:

בעיה אופיינית-

נניח שבמישור, נתונים לנו n חצאי מישורים $H=\{h_1,\dots,h_n\}$. אנו רוצים לחשב את החיתוך שלהם - $K=\bigcap_{i=1}^{n} h_i$

החיתוך הוא או ריק או מצולע קמור של ~~עד~~ עד n צלעות, כאשר כל ישר חוסם תורם לכל היותר צלע אחת לשפת החיתוך

דוגמה-



הגדרה-

דואליות במישור היא טרנספורמציה שמעבירה נקודות לישרים וישרים לנקודות כך שיחס ההכלה $p\in\ell$ "נשמר"

הערה-

נשים לב שדואליות כזו היא "הגיונית" כי גם לנקודות וגם לישרים יש 2 דרגות חופש (כלומר הם מאופיינים באופן חח"ע ע"י 2 פרמטרים ממשיים)

הערה-

למרות ההערה הקודמת, יש בעייתיות מסויימת לבטא ישרים ע"י הנוסחה $y=ax+b$, לדוגמה. זה קורה כי איך נבטא, למשל, את $x=1$?.

אותה בעיה קיימת גם על הייצוג $Ax+By=1$ כי אז לא נוכל לבטא ישרים שעוברים דרך הראשית

הדואליות עובדת היטב במישור הפרויקטיבי. אנו נייצג ישר ע"י שלושה פרמטרים (A,B,C) - מתאים ל $Ax+By+C=0$ - על הבנה שלכל $\lambda\neq 0$ מתקיים $(A,B,C)=(\lambda A,\lambda B,\lambda C)$.

אופן, זה אומר שנרצה לייצג כל נקודה ע"י 3 פרמטרים (X_1,X_2,X_0)
כאשר $(X_1,X_2,X_0)=(\lambda X_1,\lambda X_2,\lambda X_0)$ לכל $\lambda \neq 0$. הדרך שעושה
זאת היא שהנקודה (x,y) תיוצג ע"י $(x,y,1)$, כלומר
(X_1,X_2,X_0) תתורגם ל $(X_1/X_0, X_2/X_0)$.
הייצוג הנ"ל נקרא קואורדינטות הומוגניות.
תחת הגדרות ~~[illegible]~~ נקבל שנק' (X_1,X_2,X_0) נמצאת
על הישר (A,B,C) אמ"מ $AX_1+BX_2+CX_0=0$.
נגדיר כעת את טרנספורמצית הדואליות ("הדואליות הראשונה")
ע"י כך שנעביר את הנקודה (a,b,c) לישר (a,b,c) ואת
הישר (A,B,C) לנקודה (A,B,C). ברור שיחס החלה נשמר.

הערה-
נשים לב שיש לנו נקודת תורפה והיא שהדואליות לא מתאימה
לנקודה $(0,0,0)$

הערה-
נשים לב שהדואליות מופעלת על עצמה היא העתקת הזהות.

הערות-
כל קואורדינטה יכולה להיות 0
נקודות מהצורה $(x,y,0)$ הן נקודות באינסוף
ישרים מהצורה $(0,0,c)$ הם ישרים באינסוף (כל הנקודות באינסוף
חלות בישרים אלו - ולמעשה זה אותו ישר שהוא כמו "המסגרת" של המישור
וכל נקודה בו מייצגת כיוון)

הערה-
נניח ישר l שלא עובר דרך הראשית. ניתן לייצג את הישר ע"י $(A,B,1)$
כלומר ע"י $AX+BY+1=0$.
נניח נקודה נוספת $p=(x,y)$ שלא חלה בישר.
נשים לב שאם p נמצאת באותו צד של l כמו הראשית, אזי הצבה

באמצעות l תיתן מספר חיובי. אחרת, ההצבה תיתן גם שלילי.

סימונים -

נסמן את הישר הדואלי לנקודה p ב p^*

נסמן את הנקודה הדואלית לישר l ב l^*

טענה -

הדואליות הראשונה שומרת על היחס

p והראשית מאותו צד של l אמ"מ l^* והראשית מאותו צד של p^*

הוכחה -

p והראשית מאותו צד של l $\Leftrightarrow$ $AX+BY+1=0$

$\equiv$

l^* והראשית מאותו צד של p^* $\Leftrightarrow$ $AX+BY+1=a$

לאחר הפעלת הדואליות נקבל את אותם שוויונות ולכן היחס נשמר

הדואליות השנייה-

נגדיר דואליות נוספת אשר מעבירה נקודה $p(a,b)$ לישר $y=ax-b$

וישר l $y=cx+d$ לנקודה $(+c,-d)$

דואליות זו לא מוגדרת עבור ישרים אנכיים

קל לראות שיחס החצייה נשמר: p על l $\Leftrightarrow$ $b=ac+d$

$\Updownarrow$

l^* על p^* $\Leftrightarrow$ $-d=+ac-b$

שם היחס מעל/מתחת (p נמצאת מעל l $\Leftrightarrow$ $b>ac+d$

l^* נמצאת מעל p^* $\Leftrightarrow$ $-d>ac-b$)

בקואורדינטות האוגניות, הטרנספורמציה היא

נק' $(a,b,1)$ ~~ישר~~ ישר $(c,-1,d)$

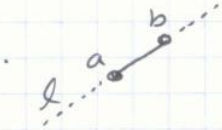
$\downarrow$ $\downarrow$

ישר $(a,-1,-b)$ ~~נקודה~~ נקודה $(c,-d,1)$

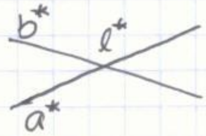
מה שנעשה עכשיו זה ננסה לפרש בעיות מהמישור המקורי (הפרימלי) למישור דואלי.

לפני זה ננסה להבין עוד קצת את המשמעות של המעבר (דואליות שנייה)

• נניח שיש לנו קטע ab על ישר l

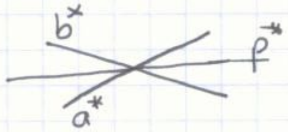


לאחר הדואליות נקבל



. כלומר 2 ישרים שנקודת החיתוך שלהם היא l^*.

אם p נקודה כלשהי על הקטע ab אז היא תעבור לישר שעובר דרך l^* ושיפועו בין a^* ו b^*.

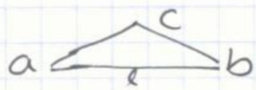


לכן, הקטע ab מתרגם ל double wedge - כ הנקודות הנמצאות מעל אחד הישרים ומתחת לשני. מושג נוסף לכך הוא המספרה של a^* ו b^*

נשים לב שנקודה w^* נמצאת במספרה אמ"ם ישר w חותך את l

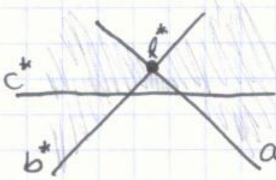
נקודה w^* בצד שמאל אמ"ם w מתחת ל a ומעל b

• נניח כעת משולש



. למה הוא יעבור?

הוא יעבור למשהו כמו



כלומר

~~המשולש~~ המשולש הוא קב' כ הנקודות הנמצאות מתחת לפחות ישר דואלי אחד ומעל לפחות ישר דואלי אחד.

נקודה w^* נמצאת בפרופלור רק אמ"ם w ישר החוצה את המשולש

נקודה p נמצאת במשולש אמ"ם כל ישר λ דרך p חותך את המשולש

אמ"ם כל נקודה λ^* על הישר p^* נמצאת בפרופלור

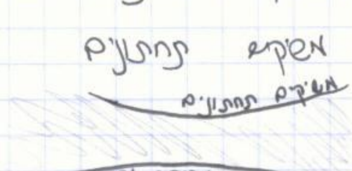
• נניח C קבוצה קמורה

.

ניקח את כ המשיקים ל C ונעביר לעולם דואליות. נקבל שני עקומים (1) נק' דואליות של משיקים עליונים

(2) נק' דואליות של משיקים תחתונים

נקבל משהו מהסגנון



כאשר 2 העקומים הם קמורים.

האסימפטוטות של השקועים הקמורים מייצגות את הנק' הימנית והנק' השמאלית ביותר של C

כעת, נחזור לבעיית החיתוך ונבחן אותה בראי 2 הדואליות...

בדואליות הראשונה:

נניח שהראשית שייכת לחיתוך (שקול להנ"ח שהחיתוך לא ריק, כי אחרת ניתן לעשות טרנספורמציית הזזה) ונסמנה ב o.

p בחיתוך $\Leftrightarrow$ o,p באותו צד של כל ישר חוסם l (נסמן את הישרים החוסמים של h_i ב l_i)

זה שקול לכך ש p^* מכיל באותו צד את o ואת כל l_i^*

לכן, p על שפת החיתוך $\Leftrightarrow$ p^* ישר תומך בקמור של $\{l_1^*,\dots,l_n^*,o\}$

p מחוץ לחיתוך $\Leftrightarrow$ p^* חותך את הקמור של $\{l_1^*,\dots,l_n^*,o\}$

p בתוך החיתוך $\Leftrightarrow$ p^* זר לקמור של $\{l_1^*,\dots,l_n^*,o\}$

כלומר, הקמור $C = ch\{l_1^*,\dots,l_n^*,o\}$ הוא הדואלי לחיתוך א

סדר הצלעות של C הוא סדר הנקודות בחיתוך א

הערה-

- o פנימית לקמור $\Leftrightarrow$ החיתוך חסום
- o על שפת הקמור $\Leftrightarrow$ החיתוך לא חסום (ובמקרה זה השכנים של o על השפה הם הקרניים של החיתוך)

האלגוריתם-

נפעיל דואליות ראשונה על הישרים החוסמים את חצאי המישורים $\{l_1,\dots,l_n\}$

נחשב את הקמור $C = ch\{l_1^*, l_2^*,\dots,l_n^*,o\}$

נתרגם את c לחיתוך

האלגוריתם לוקח $O(n\log n) = O(n) + O(n\log n) + O(n)$

בדואליות השנייה:

נחלק את קב' חצאי המישורים לעליונים (U) $y \geq a_i x + b_i$

ולתחתונים (L) $y \leq a_i x + b_i$

נחשב את חיתוך חצאי המישורים ב U - K_U

" " " " ב L - K_L

נחשב את $K = K_U \cap K_L$

נשים לב ש

$p \in K_U \Leftrightarrow$ p מעל כל ישר $l_i \in U \Leftrightarrow p^*$ מתחת לכל הנקודות l_i^* ($l_i \in U$).

גם

$p \in \partial K_U \Leftrightarrow p^*$ תומך בקמור התחתון של $\{l_i^*\}$ ($l_i \in U$)

ובאופן סימטרי

$p \in \partial K_L \Leftrightarrow p^*$ תומך בקמור העליון של $\{l_i^*\}$ ($l_i \in L$)

ולכן, כדי לחשב את K_U ו K_L נחשב את הקמורים הנ"ל C_U ו C_L

את החיתוך $K_U \cap K_L$ ניתן לחשב בזמן לינארי ע"י sweep:

נתונות לנו סדרות הקודקודים של כל חיתוך משמאל לימין

נמזג אותן לסדרה אחת

הקודקודים מחלקים את המישור לפסים אנכיים בין נק' עוקבות

בכל פס, שפת K_U מופיעה כקטע וכך גם שפת K_L

בכל פס נבדוק אם שפת K_U מתחת לשפת K_L ואם התשובה

חיובית אז בפס זה החיתוך